

Tese de Doutorado

**EFEITOS NÃO-GAUSSIANOS
EM ASTROFÍSICA E COSMOLOGIA**

Dissertação submetida

à

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

por

Lucio Marassi de Souza Almeida

sob a orientação de

José Ademir Sales de Lima, PhD.

Como requisito parcial

para obtenção do Grau de

DOUTOR EM FÍSICA

Centro de Ciências Exatas e da Terra

Departamento de Física Teórica e Experimental

Maio, 2007

Natal, Rio Grande do Norte

Aos meus pais, Lucio e Vanete.

Agradecimentos

Durante a minha vida não foram poucas as pessoas que contribuíram, cada uma a seu modo, para que eu chegasse ao presente estágio. Quero, portanto, usar este espaço para agradecer às pessoas que apoiaram e ajudaram a tornar possível este trabalho.

- Ao Prof. Dr. José Ademir Sales de Lima, pela sugestão do tema e pela firmeza e dedicação com que me orientou no caminho da cosmologia. Foi um privilégio ter realizado esse doutorado com o prof. Ademir.
- Ao Prof. Dr. Clodomiro Alves Junior, por permitir o uso de seu laboratório, o LabPlasma (UFRN); e também por ter colaborado, junto com sua equipe, para os resultados de meus estudos no capítulo referente à teoria do plasma.
- Ao Prof. Dr. Francisco Odolberto, pela colaboração no artigo sobre plasma, e pela amizade construída durante esse período de pesquisa.
- Ao Prof. Dr. Luis Carlos Jafelice. Minha carreira acadêmica em astrofísica foi iniciada pelo seu exemplo e dedicação, apoio e orientação constante.
- Aos Professores Doutores Janilo Santos, Joel Câmara e Nilza Pires, por serem tão acessíveis e dedicados em seu trabalho; seguramente minha formação acadêmica deve muito à todos eles.
- Aos meus pais Lucio de Souza Almeida e Vanete Carmem, por toda uma vida de apoio, amor e dedicação, pela confiança em meus potenciais e o amparo amoroso nos momentos difíceis. À minha irmã Vívian e meu cunhado Marcos, pelo apoio familiar, emocional (e mesmo profissional) constante.

- À minha querida e amada Adriana Christine e à Catarina (Cacá), por agüentarem minhas manias e suavizarem meu coração, pelo seu apoio e incentivo, tão necessários nos momentos difíceis.
- Aos amigos de estudo e trabalho do tempo de meu mestrado em astrofísica, companheiros que, direta ou indiretamente, contribuíram para minhas escolhas acadêmicas: José Ronaldo, Bráulio, Melquisedec, Vilar, Edmilson e José Roberto.
- Aos amigos João Maria, João Vital, Rose Clívia e Edson, cujas críticas e sugestões por várias vezes apontaram o caminho correto. Desenvolver artigos científicos, ainda durante a tese de doutorado, e com amigos de sala como esses, seguramente é um privilégio reservado a poucos. Espero que continuemos essa parceria em futuro bem próximo.
- À todos os meus familiares do Rio de Janeiro: tios Roberto e Lucia, Juvenal e Nídia, primos Roberto, Rodrigo, Karin e Rafael, dentre vários outros que o pouco espaço destas linhas não permite citar, agradeço de coração. A presença amorosa dessa família me ajudou demais nos meus estágios no Rio de Janeiro.
- Aos amigos de São Paulo Nelson e Márcia Cangelar, pelo apoio constante durante as diversas viagens ao Rio e à São Paulo, necessárias à conclusão de minha tese.
- Ao CNPq, pelo apoio financeiro recebido.

EFEITOS NÃO-GAUSSIANOS EM ASTROFÍSICA E COSMOLOGIA

por

Lucio Marassi de Souza Almeida

SUMÁRIO

As recentes observações astronômicas indicam que o universo tem curvatura espacial nula, expande aceleradamente e seu conteúdo de matéria-energia é composto por $\sim 30\%$ de matéria (bárions + matéria escura) e $\sim 70\%$ de energia escura, uma componente relativística com pressão negativa. No entanto, para construir modelos ainda mais realísticos do universo é necessário considerar a evolução de pequenas perturbações de densidade sob ação da gravidade afim de explicar a riqueza de estruturas observadas na escala de galáxias e aglomerados de galáxias.

O processo de formação de estruturas foi pioneiramente descrito por Press e Schechter (PS) em 1974, através da função de massa dos aglomerados de galáxias. O formalismo PS pressupõe uma distribuição gaussiana para o campo primordial das perturbações de densidade. Além de um sério problema de normalização, tal abordagem não explica os atuais dados de raios-X dos aglomerados, e está em desacordo com as modernas simulações computacionais.

Nesta tese, discutimos diversas aplicações da q -estatística não extensiva (não gaussiana) proposta em 1988 por C. Tsallis, com especial ênfase para o processo cosmológico de formação das grandes estruturas. Inicialmente, investigamos a estatística do campo de flutuações dos contrastes de densidade primordiais, já que os dados mais recentes do Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) indicam um desvio da gaussianidade. Assumimos que tais desvios podem ser descritos pela estatística não extensiva, pois ela se reduz à distribuição gaussiana, no limite do parâmetro livre $q \rightarrow 1$, o que permite uma comparação direta com a teoria padrão. Estudamos sua aplicação para um catálogo de aglomerados galácticos baseado no *ROSAT All-Sky Survey* (doravante nomeado como HIFLUGCS). Considerando o modelo padrão gaussiano para a função de massa nos dados do HIFLUGCS, obtemos $\Omega_m = 0,12^{+0,06}_{-0,04}$ e $\sigma_8 = 0,96^{+0,15}_{-0,12}$.

Concluimos que o modelo gaussiano padrão aplicado ao HIFLUGCS não corrobora os dados mais recentes obtidos de forma independente pelo WMAP. Utilizando a estatística não extensiva, um teste χ^2 sobre todos os parâmetros livres (q , Ω_m e σ_8) fornece como melhor ajuste $q = 1,1$, $\Omega_m = 0,16$ e $\sigma_8 = 0,82$. Além disso, fixando $\sigma_8 = 0,70$, obtemos $\Omega_m = 0,20$ e $q = 0,19$ como melhor ajuste, valores bem mais compatíveis com os resultados do WMAP. Demonstramos também que a distribuição de Burr corrige o problema da normalização. O formalismo da função de massa dos aglomerados foi também investigado na presença da energia escura. Neste caso, limites sobre os mais diversos parâmetros cósmicos, tais como: Ω_m , σ_8 , a densidade de energia escura Ω_λ , e seu parâmetro ω da equação de estado, foram também obtidos. A estatística não extensiva foi ainda implementada em 2 problemas distintos: (i) a sonda de plasma e (ii) na descrição da radiação de Bremsstrahlung (a radiação primária dos aglomerados de raio-X); um problema de considerável interesse astrofísico.

Numa outra linha de desenvolvimento, utilizando dados de supernovas e fração de massa do gás em aglomerados, discutimos a variação do parâmetro da equação de estado da energia escura, considerando 2 expansões distintas: $w(z) = \omega_o + \omega_1 z$ e $w(z) = \omega_o + \omega_1 z/(1+z)$. No primeiro caso obtemos $\omega_o = -1,25$, $\omega_1 = 1,3$ e $\Omega_M = 0,26$, enquanto no segundo, o melhor ajuste é dado por $\omega_o = -1,4$, $\omega_1 = 2,57$ e $\Omega_M = 0,26$. Um aspecto interessante desse trabalho é que os resultados não necessitam de um prior em Ω_M , como ocorre usualmente nas análises envolvendo apenas os dados de supernovas.

Finalmente, fazemos uma nova estimativa do parâmetro de Hubble, H_0 , através de uma análise conjunta envolvendo o efeito Sunyaev-Zeldovich (SZE), o espectro de raios-X de aglomerados e as oscilações acústicas dos bárions. Mostramos que a degenerescência dos dados observacionais em relação a Ω_m é quebrada quando incluímos a assinatura das oscilações acústicas dos bárions, dada pelo catálogo do Sloan Digital Sky Survey (SDSS). Nossa análise, baseada nos dados de SZE/raios-X para uma amostra de 25 aglomerados com morfologia triaxial, fixa o parâmetro de Hubble como sendo $H_0 = 74_{-3,5}^{+4} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (1σ). Este resultado está em bom acordo com estudos independentes do projeto *Hubble Space Telescope* e as recentes estimativas do WMAP.

A STUDY OF THE NONEXTENSIVE DISTRIBUTION ON COSMOLOGY

by

Lucio Marassi de Souza Almeida

SUMMARY

The recent astronomical observations indicate that the universe has null spatial curvature, is accelerating and its matter-energy content is composed by $\sim 30\%$ of matter (baryons + dark matter) and $\sim 70\%$ of dark energy, a relativistic component with negative pressure. However, in order to built more realistic models it is necessary to consider the evolution of small density perturbations for explaining the richness of observed structures in the scale of galaxies and clusters of galaxies.

The structure formation process was pioneering described by Press and Schechter (PS) in 1974, by means of the galaxy cluster mass function. The PS formalism establishes a Gaussian distribution for the primordial density perturbation field. Besides a serious normalization problem, such an approach does not explain the recent cluster X-ray data, and it is also in disagreement with the most up-to-date computational simulations.

In this thesis, we discuss several applications of the nonextensive q -statistics (non-Gaussian), proposed in 1988 by C. Tsallis, with special emphasis in the cosmological process of the large structure formation. Initially, we investigate the statistics of the primordial fluctuation field of the density contrast, since the most recent data from the Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) indicates a deviation from gaussianity. We assume that such deviations may be described by the nonextensive statistics, because it reduces to the Gaussian distribution in the limit of the free parameter $q \rightarrow 1$, thereby allowing a direct comparison with the standard theory. We study its application for a galaxy cluster catalog based on the *ROSAT All-Sky Survey* (hereafter HIFLUGCS). By considering the standard Gaussian model for the mass function in the HIFLUGCS data, we obtain $\Omega_m = 0.12_{-0.04}^{+0.06}$ and $\sigma_8 = 0.96_{-0.12}^{+0.15}$. We conclude that the

standard Gaussian model applied to HIFLUGCS does not agree with the most recent data independently obtained by WMAP. Using the nonextensive statistics, a χ^2 test over all free parameters (q , Ω_m and σ_8) gives as best-fit $q = 1.1$, $\Omega_m = 0.16$ and $\sigma_8 = 0.82$. Yet, if we fix $\sigma_8 = 0.70$, we obtain $\Omega_m = 0.20$ and $q = 0.19$ as best-fit, values much more aligned with WMAP results. We also demonstrate that the Burr distribution corrects the normalization problem. The cluster mass function formalism was also investigated in the presence of the dark energy. In this case, constraints over several cosmic parameters, such as: Ω_m , σ_8 , the dark energy density Ω_λ , and its equation-of-state parameter ω , was also obtained. The nonextensive statistics was implemented yet in 2 distinct problems: (i) the plasma probe and (ii) in the Bremsstrahlung radiation description (the primary radiation from X-ray clusters); a problem of considerable interest in astrophysics.

In another line of development, by using supernova data and the gas mass fraction from galaxy clusters, we discuss a redshift variation of the equation of state parameter, by considering two distinct expansions: $w(z) = \omega_0 + \omega_1 z$ e $w(z) = \omega_0 + \omega_1 z/(1+z)$. In the first case we obtain $\omega_0 = -1.25$, $\omega_1 = 1.3$ and $\Omega_M = 0.26$, while in the second one, the best fit is given by $\omega_0 = -1.4$, $\omega_1 = 2.57$ and $\Omega_M = 0.26$. An interesting aspect of this work is that the results do not need a prior in Ω_M , as usually occurs in analyzes involving only supernovae data.

Finally, we obtain a new estimate of the Hubble parameter, H_0 , through a joint analysis involving the Sunyaev-Zeldovich effect (SZE), the X-ray data from galaxy clusters and the baryon acoustic oscillations. We show that the degeneracy of the observational data with respect to Ω_M is broken when the signature of the baryon acoustic oscillations as given by the Sloan Digital Sky Survey (SDSS) catalog is considered. Our analysis based on the SZE/X-ray data for a sample of 25 galaxy clusters with triaxial morphology yields $H_0 = 74^{+4.0}_{-3.5}$ km s⁻¹ Mpc⁻¹ (1σ). This result is in good agreement with the independent studies provided by the Hubble Space Telescope project and the recent estimates of the WMAP.

Índice

Agradecimentos	i
Resumo	iii
Abstract	v
Índice de Figuras	xi
Índice de Tabelas	xviii
Notação e Convenções	xix
1 INTRODUÇÃO	1
2 COSMOLOGIA	8
2.1 Introdução à Cosmologia do <i>Big Bang</i>	8
2.1.1 O <i>Big Bang</i>	9
2.1.2 Universos de Friedmann–Robertson–Walker (FRW)	9
2.1.3 A História Térmica do Universo	15
2.2 A Constante Cosmológica	17
2.2.1 Energia do Vácuo	17
2.2.2 O Problema da Constante Cosmológica: Algumas possíveis Soluções	19
2.3 Determinação dos Parâmetros Cosmológicos	22
2.3.1 O “ <i>Lookback Time</i> ”	22
2.3.2 A Distância Luminosidade	23

2.3.3	Medidas da Distância	24
2.3.4	A Taxa de Expansão H_0	25
2.3.5	O Conteúdo de Matéria Ω_M	26
2.3.6	A Constante Cosmológica Ω_Λ	32
2.3.7	A Curvatura Espacial Ω_K	37
3	A FORMAÇÃO DE ESTRUTURAS EM GRANDE ESCALA	39
3.1	Uma Breve Introdução à Formação de Estruturas em Grande Escala	39
3.1.1	Aglomerados e Superaglomerados de Galáxias	39
3.1.2	Matéria Bariônica	41
3.1.3	Matéria Escura Não-Bariônica	41
3.1.4	Matéria Escura Fria, Morna e Quente	42
3.1.5	Formação de Estruturas em Grande Escala	42
3.2	O Paradigma Inflacionário	47
3.2.1	Inflação Cosmológica	47
3.2.2	A Origem das Perturbações de Densidade	48
3.2.3	Oscilações Acústicas no Plasma	48
3.3	A Evolução das Perturbações de Densidade	50
3.3.1	Escoamento de Fluidos Relativísticos	50
3.3.2	A Função de Transferência	57
3.3.3	O Espectro das Perturbações de Densidade	58
3.3.4	O Contraste de Densidade Filtrado	60
3.3.5	A Teoria Linear Funciona	61
4	MECÂNICA ESTATÍSTICA E TEORIA CINÉTICA NÃO EXTENSIVA	63
4.1	Mecânica Estatística Não Extensiva	63
4.1.1	Introdução	63
4.1.2	Equações Centrais da Mecânica Estatística Não Extensiva	65
4.1.3	Aplicações Dentro e Fora do Equilíbrio	71
4.1.4	Aplicações em Astrofísica e Cosmologia	71
4.2	Teoria Cinética Não Extensiva	73

4.2.1	O Caso Extensivo	74
4.2.2	O Caso Não Extensivo	75
5	EFEITOS NÃO-GAUSSIANOS NA FORMAÇÃO DE ESTRUTURAS EM GRANDE ESCALA	79
5.1	Introdução	79
5.2	Formação de Estruturas na Visão de Press-Schechter (PS): Aspectos Qualitativos	80
5.3	O Formalismo de Press-Schechter (PS)	81
5.4	Justificativa de Zel'Dovich para a Não-Gaussianidade na Formação das Estruturas	83
5.5	q-Estatística e Aproximação de PS	83
5.6	Extensões da Aproximação de PS e Nosso Método PL	86
5.7	O Problema da Normalização	89
5.8	Efeitos Não-Gaussianos no Plano $\sigma_8 - \Omega_m$	92
5.8.1	O Modelo Teórico de PS com os Dados do HIFLUGCS	93
5.8.2	O Modelo PL e o Ajuste aos Dados do HIFLUGCS	97
5.8.3	Energia Escura e Formação de Estruturas	106
6	EFEITOS NÃO-GAUSSIANOS EM PLASMAS ASTROFÍSICOS	115
6.1	Introdução	115
6.2	Bremsstrahlung Térmico	116
6.2.1	A Emissão Térmica de Bremsstrahlung: O Cálculo Padrão	116
6.2.2	A Emissão Térmica de Bremsstrahlung Não Extensiva	118
6.2.3	Fatores de Gaunt Médios	119
6.2.4	Análise dos Resultados	122
7	NOVOS LIMITES COSMOLÓGICOS USANDO ENERGIA ESCURA, FRAÇÃO DE MASSA DO GÁS, E SNe Ia	128
7.1	Introdução	128
7.2	Equações Básicas	130
7.3	Limites Observacionais	131
7.4	Conclusão e Perspectivas	132

8	LIMITANDO H_0 DO EFEITO SUNYAEV-ZEL'DOVICH, DOS DADOS DE RAIOS-X, E DAS OSCILAÇÕES DOS BÁRIONS	134
8.1	Introdução	134
8.2	A determinação de H_0 : Aspectos Qualitativos	136
8.3	Equações Básicas e a Amostra	137
8.4	Análise e Resultados	139
8.5	Limites Vindos das Medidas de SZE/raio-X	139
8.6	Análise Conjunta Usando as Técnicas de SZE/raio-X e do BAO	141
8.7	Conclusões	144
9	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	146
A	Não Extensividade na Sonda de Plasma	151
A.1	Introdução	151
A.2	A Sonda de Langmuir - Aparato Experimental	152
A.3	A Sonda de Plasma - Caso Extensivo	156
A.3.1	A Sonda de Plasma - Caso Não Extensivo	156
A.4	A Densidade dos Elétrons	157
A.5	Resultados Básicos	159
	BIBLIOGRAFIA	167

Índice de Figuras

2.1	Limites dos dados de supernovas e estruturas em grande escala sobre Ω_M e sobre o parâmetro da equação de estado w_X , em um universo plano dominado por matéria e energia escura[54]. Contornos finos (à esquerda) representam limites das medidas da RCF e das estruturas em grande escala, enquanto contornos grossos são os limites vindos das observações de supernovas; linhas sólidas se aplicam a modelos com w_X constante, enquanto linhas tracejadas se aplicam a modelos de campos escalares dinâmicos. Os limites são combinados à direita.	21
2.2	Histórias de expansão para diferentes valores de Ω_M e Ω_Λ . De cima para baixo, as curvas descrevem $(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (0.3, 0.7), (0.3, 0.0), (1.0, 0.0)$, e $(4.0, 0.0)$	23
2.3	A curva de rotação da galáxia espiral NGC 6503, determinada pelas observações por rádio do gás de hidrogênio no disco[69]. A linha tracejada mostra a curva de rotação esperada apenas do material do disco, e a linha com traços e pontos mostra apenas o halo de matéria escura.	29
2.4	Diagrama de Hubble para supernovas em altos <i>redshifts</i> descobertas pelo <i>SN Cosmology Project</i> [79]. Um diagrama similar foi obtido pelo <i>High-Redshift Supernova Project</i> [80]. Ambos os grupos concluíram que as supernovas distantes são menos brilhantes do que o esperado, e esse efeito poderia ser explicado por um universo acelerado.	34
2.5	As regiões de melhor ajuste de confiança estatística (68% – 99% c.l.) no plano $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$, para os resultados das supernovas em altos <i>redshifts</i> . Observações atuais desfavorecem o modelo Einstein-de Sitter (círculo) em vários desvios padrões[79].	35

2.6	O espectro de potências do terceiro ano do WMAP (em preto) comparado a outros recentes levantamentos do espectro angular de potências da RCF, incluindo o Boomerang, Acbar, CBI, e VSA. Para melhor visualização, os dados com $l < 600$ do Boomerang e VSA são omitidos, por terem medidas consistentes com o WMAP, mas de menores pesos. É evidente nessa figura o pico em aproximadamente $l_{\text{peak}} \sim 200$, predito teóricamente para um universo espacialmente plano. A precisão alcançada pelo WMAP, com sensibilidade aumentada nas menores escalas angulares, faz com que ele seja hoje uma importante fonte de calibração para experimentos de alta resolução.[5]	36
3.1	O espectro de potências da matéria para aglomerados de galáxias, obtido por três diferentes catálogos de aglomerados.	44
3.2	O espectro de potências para a matéria escura fria (Cold Dark Matter - CDM), CDM com tilt (TCDM), matéria escura quente (Hot Dark Matter - HDM), e matéria escura composta, ou seja, a quente mais a fria (Mixed Dark Matter - MDM), normalizadas com o satélite COBE, para a formação de estruturas em grande escala[88].	46
5.1	Fração da densidade crítica constituída por estruturas ligadas de massa M . As linhas sólidas superiores e inferiores são os modelos de PS corrigidos pelo fator 2 e sem a correção da normalização, respectivamente. As linhas de tracejado longo, tracejado curto e pontilhada são obtidas usando a distribuição PL. Note que o parâmetro q afeta consideravelmente as escalas de maiores massas.	86

5.2	Fração da densidade crítica constituída por estruturas ligadas de massa M . Em ambos os painéis as linhas sólidas superiores e inferiores são os modelos de PS corrigidos pelo fator 2 e sem a correção da normalização, respectivamente. As linhas de tracejado longo, tracejado curto e pontilhada no painel esquerdo são obtidas usando a distribuição PL. No painel direito comparamos o comportamento da função de massa usando a distribuição de Burr (as linhas de tracejado curto e longo) com a mesma função de massa usando os métodos de PS (linhas sólidas) e PL (linha pontilhada).	90
5.3	Função de massa de HIFLUGCS comparada com o modelo de melhor ajuste em $\Omega_m = 0,12$ e $\sigma_8 = 0,96$ (linha sólida). Vemos igualmente os modelos de melhor ajuste da função de massa quando fixamos $\Omega_m = 0,5$ ($\Rightarrow \sigma_8 = 0,60$, linha tracejada) e $\Omega_m = 1,0$ ($\Rightarrow \sigma_8 = 0,46$, linha pontilhada).	96
5.4	Contornos de confiança estatística para o teste χ^2 . A cruz indica a posição do mínimo, χ^2_{\min} . As elipses indicam os níveis de confiança de 68 %, 90 %, 95 %, e 99 % para dois parâmetros de interesse, i.e. $\Delta\chi^2 \equiv \chi^2 - \chi^2_{\min} = 2,30, 4,61, 6,17$ e $9,21$, respectivamente.	96
5.5	O intervalo $[-1 < q < 1]$. Fixamos q e realizamos um teste χ^2 para os parâmetros $\Omega_m - \sigma_8$. À medida que aumentamos o valor de q , temos maiores Ω_m e menores σ_8 como melhor ajuste. No limite $q = 1,0$ obtemos o mesmo resultado do método PS.	100
5.6	O intervalo $[1 < q < 3]$. Fixamos q e realizamos um teste χ^2 no plano $\Omega_m - \sigma_8$. Fixamos dois valores diferentes de q , um muito próximo do limite do intervalo inferior ($q = 1,03$) e o outro um pouco maior do que o primeiro ($q = 1,30$). Notamos que uma pequena variação em q produz uma imensa variação nos dois parâmetros cosmológicos. Nós fixamos o <i>intervalo físico de q</i> nos limites $[1,03 \leq q < 1,30]$	101

5.7	No painel superior, vemos os resultados de Reiprich (equivalentes ao nosso método PL quando $q \rightarrow 1$), que mostra um Ω_m muito baixo e um σ_8 alto (comparados com os resultados recentes da RCF). À medida que aumentamos o valor de q , temos maiores Ω_m e menores valores de σ_8 como melhor ajuste, e o painel inferior mostra que podemos ter parâmetros cosmológicos bem de acordo com os atuais dados da RCF, usando os mesmos dados observacionais do catálogo HIFLUGCS, apenas mudando o método PS padrão pela nossa aproximação PL.	102
5.8	Fixamos Ω_m e realizamos um teste χ^2 no plano $q - \sigma_8$; como resultado temos um contorno estatístico transversal e quase plano, mostrando uma clara dependência linear entre q e σ_8 . Veremos o mesmo comportamento no plano $q - \Omega_m$, fixando σ_8	103
5.9	Outro exemplo mostrando como a distribuição PL limita os parâmetros cosmológicos. Fixamos σ_8 e realizamos um teste χ^2 no plano $q - \Omega_m$. No painel superior, para $\sigma_8 = 0,70$, temos $\Omega_m \sim 0,20$ como melhor ajuste. Quanto mais aumentamos σ_8 , mais diminuimos Ω_m (painéis do meio e inferior).	104
5.10	Os triângulos representam a função de massa observada em raio-X, binada, do catálogo HIFLUGCS, e as linhas são os modelos teóricos da função de massa (todos eles usando o catálogo HIFLUGCS como pontos, após um procedimento padrão de ajuste). A linha de tracejado longo é o resultado de Reiprich: o método PS com $\Omega_m = 0,12$ e $\sigma_8 = 0,96$ (o primeiro parâmetro é baixo demais e o segundo é alto, em relação às recentes medidas do WMAP). A linha sólida é o nosso método PL com $\sigma_8 = 0,70$ e $\Omega_m = 0,20$ (parâmetros de acordo com os dados recentes da RCF). A linha pontilhada é a aproximação de PS com os mesmos parâmetros do nosso método PL (vemos claramente a falta de ajuste aos dados observacionais).	105
5.11	Gráfico mostrando o valor real de A na equação (5.41) como uma função de w para 9 cosmologias planas com Ω_M espalhado entre 0,1 e 0,9 (linhas cinza). Para comparação plotamos a fórmula de ajuste de Basilakos[176] (linha tracejada) e a equação (5.42) (linha preta).	110

5.12	Gráfico mostrando a função de massa predita pela fórmula de ajuste de Sheth & Tormen[144] calculada para $\Omega_M = 0,3$, $\Omega_X = 0,7$ para três valores diferentes de w , e para três épocas correspondentes a $a = 1/3, 1/2, 1$. Como o espectro de potências é normalizado no presente, e δ_c é apenas fracamente dependente da cosmologia, então existe pouca diferença entre as funções de massa preditas para $a = 1$. À medida que recuamos no tempo a diferença se torna maior por causa dos diferentes fatores de crescimento linear.	112
5.13	Usamos o formalismo de PS com os dados de raio-X do catálogo HI-FLUGCS, presentes na seção 5.8.1, mas com a evolução da densidade crítica dada pela equação (5.44), de modo a acrescentarmos o efeito da energia escura dentro da aproximação de PS.	114
6.1	Gráfico de Novikov[192, 191], mostrando diferentes regiões para o fator de Gaunt.	120
6.2	Emissão do Bremsstrahlung Térmico das regiões “Large-Angle” e “Large-Angle Tail”. Obtemos a linha sólida usando a distribuição Maxwelliana, e as demais linhas usando nossa distribuição de lei de potências (Power Law - PL) com diferentes valores do parâmetro q . Podemos facilmente observar a flexibilidade do parâmetro livre q após o limite $\log\left(\frac{h\nu}{kT}\right) = 1$	123
6.3	Mesma explicação da Fig. 6.2, mas para a região “Small-Angle UP”. . . .	124
6.4	O comportamento da emissão do Bremsstrahlung térmico na região “Small-Angle Classical”, usando a Maxwelliana e a nossa distribuição PL, para valores diferentes de $\gamma^2 = \left(\frac{kT}{Z^2 R_y}\right)$	125
6.5	O comportamento do fator de Gaunt médio na região “Small-Angle Classical”, usando apenas nossa distribuição PL, para diferentes valores do parâmetro q . Cada curva é construída usando um valor diferente de $\gamma^2 = \left(\frac{kT}{Z^2 R_y}\right)$. Podemos facilmente ver que o método PL apresenta o mesmo comportamento do fator de Gaunt médio que o do método padrão; ou seja, podemos usar em nosso método as mesmas aproximações no fator de Gaunt.	126

7.1	Limites marginalizados no plano ω_0 e ω_1 de uma análise conjunta dos dados do Chandra ($f_{\text{gas}}(z)$) e SNe Ia para o modelo 1 (painel esquerdo) e 2 (painel direito). As linhas sólidas marcam os limites de confiança em 1, 2 e 3σ	133
8.1	Distância do diâmetro angular como função do <i>redshift</i> para $\Omega_m = 0,3$ e alguns valores selecionados do parâmetro h . Os pontos correspondem às distâncias de SZE/X-ray para os 25 aglomerados de De Filippis <i>et al.</i> [214]. O diamante aberto corresponde ao aglomerado de Abell 773, um ponto fora do conjunto, que foi excluído de nossa análise estatística.	138
8.2	Regiões de confiança estatística (68,3%, 95,4% e 99,7%) no plano (Ω_m, h) fornecidas pelos dados de SZE/X-ray de De Filippis <i>et al.</i> (2005)[214]. Os valores de melhor ajuste são $h = 0,75$ e $\Omega_m = 0,15$	140
8.3	Contornos no plano $\Omega_m - h$ usando análises conjuntas de SZE/X-ray e BAO. Os contornos correspondem aos níveis de confiança de 68,3%, 95,4% e 99,7%. Os parâmetros de melhor ajuste convergem para $h = 0,74$ e $\Omega_m = 0,27$	141
8.4	Função de probabilidade para o parâmetro h em um universo Λ CDM plano, das emissões de SZE/X-ray. As linhas sombreadas são cortes nas regiões de probabilidade de 68,3% e 95,4%. Vemos que a região permitida é bem limitada e está de acordo com outros estudos independentes[207, 5].	143
A.1	A sonda de Langmuir.	153
A.2	Curva caracterstica de uma sonda de Langmuir.	154
A.3	Os resultados de BG (Boltzmann-Gibbs) e de PL (Power Law, não extensivo) para a densidade eletrônica, onde fixamos o valor de J_{e0} ($J_{e0} = 0,792$ Ampères), em função da temperatura eletrônica. No intervalo $q > 1$	160
A.4	Os resultados de BG (Boltzmann-Gibbs) e de PL (Power Law, não extensivo) para a densidade eletrônica, onde fixamos o valor de J_{e0} ($J_{e0} = 0,792$ Ampères), em função da temperatura eletrônica. No intervalo $1/3 < q < 1$	161

A.5	Sonda do lado de fora da bainha de plasma do cátodo. Região de interações Coulombianas de longo alcance, baixo caos, comportamento de plasma. A curva PL com $q = 1,6$ explica muito bem a região após a dobra de joelho nos dados da sonda (onde o potencial da sonda é sobrepujado pelo potencial do plasma). Esta curva PL descreve a região de fora da bainha <i>da sonda</i> , onde podemos detectar as variáveis macroscópicas <i>reais</i> do plasma (temperatura, pressão, densidade, etc.), e nem precisamos deslocar a curva para isso, como devemos fazer no caso padrão de BG.	163
A.6	Sonda dentro da bainha de plasma do cátodo. Região de interações colisionais de curto alcance, forte caos, comportamento cinético randômico. A curva de BG explica muito bem os dados, especialmente no painel inferior, onde a sonda está completamente imersa na região da bainha do cátodo (mas um parâmetro de deslocamento para cima é necessário em ambos os painéis, e ainda com diferentes valores para cada um).	164
A.7	A primeira coluna mostra a região do lado de fora da bainha de plasma do cátodo. A segunda coluna mostra a região dentro da bainha.	165

Índice de Tabelas

5.1	Parâmetros do modelo Λ CDM de Lei de Potências e intervalos de confiança de 68%. Os ajustes do terceiro ano do WMAP, nesta tabela, não assumem contribuições de SZ ($A_{SZ} = 0$), de modo a permitir comparações diretas com os resultados do primeiro ano do WMAP.	98
8.1	Método SZ/X-ray: Limites para h de aglomerados de galáxias (Λ CDM). . .	143

Notação e Convenções

- Assinatura da métrica: $(+ - - -)$.
- Derivada covariante: $D_\beta u^\alpha = u^\alpha_{;\beta}$.
- Entropia generalizada: S_q .
- Constante de Boltzmann: k_B .
- A menos que seja explicitado o contrário, $\hbar = c = k_B = 1$.
- A unidade de distância utilizada é o megaparsec (Mpc):
 $1\text{Mpc} = 3,26 \cdot 10^6 \text{anos-luz} = 3,09 \cdot 10^{24} \text{cm}$.
- Confiança estatística: *c.l.* (mantive a sigla em inglês para facilitar comparações diretas com a literatura).
- O subscrito 0 irá sempre se referir a uma quantidade avaliada no tempo presente.
- Expressões em outros idiomas serão escritas em *itálico*.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

As novas observações astronômicas, aliadas a um arcabouço teórico em constante evolução, transformaram a cosmologia em uma das mais excitantes áreas da ciência contemporânea. Este fato se deve sobretudo às observações de SNe Ia em altos *redshifts*[1, 2], aos novos dados de raio-X dos aglomerados de galáxias[3], e às recentes observações da radiação cósmica de fundo (RCF) em várias escalas angulares[4, 5].

A medida da temperatura da RCF, $T_o = 2,7$ K, permitiu recontar a história cósmica dos últimos bilhões de anos relacionando tempo com temperatura. Esse fundo de microondas é extraordinariamente isotrópico; a anisotropia de dipolo é devido ao movimento peculiar da terra e a anisotropia de quadrupolo (\sim uma parte em 10^5) tem sua origem nas perturbações gravitacionais da distribuição de matéria (anisotropia intrínseca). O espectro de corpo negro evidencia que a radiação tem estado em equilíbrio com a matéria desde o início do universo, como previsto pelo modelo do *Big Bang*. A relação entre a escala angular e o tamanho da perturbação na última superfície de espalhamento (quando os fótons interagiram pela última vez com os bárions) depende da curvatura espacial e da distância até essa superfície. A resolução e a extrema sensibilidade do *WMAP* (*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*) revelaram mapas completos do céu para a interação do fluido de fóton-bárion na última superfície de espalhamento, e vários parâmetros foram medidos com bastante precisão (h , $\Omega_b h^2$, $\Omega_{ME} h^2$, Ω_{Total} , n_s , σ_8 , entre outros). A posição do primeiro pico acústico no espectro de potências da RCF favoreceu um universo espacialmente plano. Em 2007 o satélite *PLANCK* deverá ser lançado, tendo este uma melhor resolução espacial e maior sensibilidade na temperatura, permitindo com isso informações

ainda mais precisas que o WMAP.

Outro avanço de grande significado ocorreu no estudo de aglomerados de galáxias para investigações no campo da cosmologia. Inicialmente, importantes resultados foram obtidos através de observações em emissões de raio-X, e, mais recentemente, através do uso do efeito Sunyaev-Zel'dovich[35]. Os aglomerados de galáxias são os maiores sistemas virializados do Universo, bastante relaxados na região central, e devido a tais propriedades, como esperado, já começaram a fornecer limites bastante robustos em cosmologia, sendo uma das formas mais diretas de limitar a densidade de matéria do universo, Ω_m .

Dos dados da RCF sabemos que o universo é aproximadamente plano, o que está de acordo com o paradigma inflacionário[4], $\Omega_{\text{Total}} = 1,02 \pm 0,02$. Das observações dinâmicas (estudos de raio-X de estruturas em grande escala, fração de massa do gás etc.), sabemos que os modelos cosmológicos capazes de explicar os independentes estudos da idade de aglomerados globulares, precisam conter apenas cerca de 23% da densidade crítica em forma de matéria (que é gravitacionalmente atrativa). Da nucleossíntese primordial e das curvas de rotação das galáxias, sabemos que a maior parte dessa matéria é *escura*. Também sabemos hoje em dia que o universo expande aceleradamente devido aos dados atuais das supernovas SNe Ia, e para explicar tal aceleração e termos um acordo teórico com os fatos anteriormente citados, devemos ter uma outra componente de energia com pressão negativa chamada *energia escura* contribuindo com cerca de 73% para o conteúdo cósmico, cujo candidato mais antigo é a constante cosmológica.

A natureza dos dois ingredientes básicos da cosmologia contemporânea (matéria e energia escura) não foi ainda estabelecida. A matéria escura somente é percebida pelos seus efeitos gravitacionais no universo (curva de rotação das galáxias, lentes gravitacionais, estrutura de larga escala, etc.). Uma vez que a energia escura não é gravitacionalmente atrativa, a formação de praticamente todas as estruturas do universo, em pequena e grande escala, é proporcionada pela componente de matéria escura. Entender como se formam os halos de matéria escura, que abrigam todas as galáxias e aglomerados de galáxias, é essencial para se compreender o comportamento da matéria escura. Por outro lado, compreendermos o papel desempenhado pela energia escura ao longo desse processo, é igualmente importante para determinarmos a natureza desses dois componentes que respondem por 96% do universo.

As grandes estruturas do universo (aglomerados e superaglomerados de galáxias) foram formadas pelo crescimento gravitacional de pequenas perturbações de densidade, na época do desacoplamento matéria-radiação (em um *redshift* $z \sim 1000$). A densidade numérica de objetos colapsados de certa massa, quantidade denominada *função de massa* dos halos de matéria escura, $F(M)$, é uma quantidade central no estudo da evolução das estruturas cósmicas.

O trabalho pioneiro descrevendo analiticamente a função de massa das galáxias foi realizado por Press & Schechter[6] em 1974. O chamado método Press-Schechter (PS) considera que toda região onde o contraste de densidade atingiu um valor crítico δ_c condensa, “colapsa” e torna-se um objeto auto-gravitante, destacando-se do fluxo de expansão do universo, para se transformar em um objeto “ligado”. Na aproximação de PS, o contraste de densidade, δ , é um campo aleatório descrito por uma distribuição Gaussiana[6].

Embora a função de massa de PS tenha tido um êxito considerável na descrição analítica da evolução dos halos, ela possui problemas graves a serem resolvidos. Em primeiro lugar a função de distribuição estatística de PS tem um problema intrínseco de normalização, ou seja, integrando sobre toda a massa M obtemos exatamente $\frac{1}{2}$, e não uma função normalizada, como deveria ser[7]. Para explicar tal fato, Press e Schechter consideraram que o método computa apenas metade da massa efetivamente ligada, ou seja, não contabiliza as regiões subdensas, responsáveis no futuro pelo restante da massa ligada nos halos. Além desse grave problema de normalização, notamos que o método PS está em desacordo com as mais modernas simulações de N-Corpos[8, 9], e estudos de catálogos de halos em raio-X demonstram igualmente a inaptidão do formalismo de PS em explicar esses dados observacionais[10].

Os problemas inerentes ao método PS motivaram nosso estudo da função de massa dos halos, na busca de uma descrição que se adequasse melhor aos dados observacionais e, além disso, que pudesse corrigir o problema de normalização de PS sem abrir mão da simplicidade matemática desse modelo de formação de estruturas.

Vemos ainda que estudos em diversas áreas do conhecimento mostram que a estatística padrão de Boltzmann-Gibbs não se aplica a todos os sistemas físicos da natureza. Tais estudos sugerem naturalmente uma possível solução para o problema estatístico do formalismo de Press-Schechter. Conexões entre a dinâmica e a termodinâmica estão ainda longe

de serem completamente compreendidas. Os últimos anos foram marcados por uma atividade teórica extraordinária nos fundamentos da termodinâmica e mecânica estatística. Todos os avanços estão de alguma forma conectados com o conceito de não-extensividade das quantidades termodinâmicas básicas. Uma importante generalização do postulado da entropia foi proposta por Tsallis em 1988[11].

Atualmente existe um grande acúmulo de evidências observacionais e argumentos teóricos sugerindo que a entropia de Tsallis fornece uma descrição estatística e uma termodinâmica convincente para vários cenários físicos, dentre os quais destacamos: comportamento de estrelas politrópicas[12, 13], turbulências e perturbações em plasmas eletrônicos[14, 15], difusão anômala[16], distribuições de Levy[17], o problema do neutrino solar[18], distribuição de velocidades peculiar de aglomerados de galáxias[19], ou de uma maneira geral, sistemas que apresentam interações de longo alcance ou efeitos de memória microscópica efetiva[20].

Como é bem conhecido, as propriedades termodinâmicas de um sistema de muitas partículas podem ser calculadas através da mecânica estatística ou da teoria cinética. A abordagem fundamental da mecânica estatística baseia-se na função de partição do sistema, a partir da qual todas as grandezas termodinâmicas podem em princípio ser calculadas (por exemplo para um gás clássico ou quântico), enquanto que a solução cinética tem como ponto de partida a função de distribuição de velocidades moleculares. Nesta tese, daremos uma ênfase especial para o ponto de vista cinético, que no caso de um gás clássico extensivo é representada pela distribuição de Maxwell.

Sabemos hoje que as interações de longo alcance, como a força gravitacional ou Coulombiana, modificam substancialmente várias propriedades termodinâmicas usuais[21, 22, 23]. Nesse sentido, depois do trabalho pioneiro de Plastino & Plastino (1993)[12], notamos um grande interesse na literatura por aplicações da estatística não-extensiva de Tsallis em problemas de interesse astrofísico e cosmológico, devido justamente a presença de forças gravitacionais (longo alcance) em tais sistemas físicos[24, 13].

A formação de estruturas no universo é essencialmente provocada pela interação gravitacional dos halos de matéria escura. Desse modo parece natural aplicarmos a estatística não-extensiva para descrever esse processo auto-gravitante. Vários estudos sobre a não-gaussianidade primordial foram recentemente iniciados, como a evolução do espectro de

potências da formação de estruturas em modelos não-gaussianos[25] e limites da não-gaussianidade primordial através da abundância de aglomerados em altos *redshifts*[26].

Vários trabalhos ainda abordam, diretamente, a aplicação da estatística não-extensiva como uma solução da não-gaussianidade na formação de estruturas, como estudos dos limites da não-extensividade no aglomeramento de galáxias[27], estudos do perfil de densidade da matéria escura, com comparações entre a teoria não-extensiva e as simulações de N-Corpos[28], teorias não-extensivas da matéria escura e dos perfis de densidade dos gases[29], e diversos estudos mostrando indícios de que as flutuações de temperatura da radiação cósmica de fundo seriam não-extensivas (veja por exemplo Bernui *et al.* 2005[30]).

Retornando ao modelo analítico padrão de formação de estruturas, ou seja, à função de massa dos halos de PS, notamos que a estatística do contraste de densidade primordial é Gaussiana. O modelo de PS, como vimos, apresenta um problema intrínseco de normalização, além de não explicar os mais recentes dados numéricos e observacionais. Em vista de tudo o que foi até agora exposto, seria natural estudarmos se o problema estaria na estatística empregada por Press & Schechter. Esse foi o início de nosso estudo da ‘cosmologia não extensiva’, onde mostramos que a estatística não extensiva é aplicável à função de massa dos halos de matéria escura, estudamos suas propriedades de normalização e provamos que ela, aplicada às observações de halos em raio-X, se adequa melhor aos atuais parâmetros cosmológicos do WMAP que a estatística Gaussiana padrão de PS. Iniciamos ainda estudos da aplicação da energia escura no processo. Por fim, ainda estudamos as aplicações da não-extensividade na radiação de Bremsstrahlung e na sonda de plasma, com evidentes aplicações para a cosmologia observacional. Mostramos ainda análises estatísticas conjuntas de catálogos atuais de galáxias, que nos permitiram uma estimativa melhor e mais atualizada dos parâmetros cosmológicos mais importantes, como os parâmetros de matéria, energia escura e a constante de Hubble.

A tese está estruturada da seguinte forma:

- No capítulo 2 fazemos uma breve revisão da cosmologia moderna, incluindo as suas principais definições, parâmetros e métodos de pesquisa teórica e observacional.
- No capítulo 3 apresentamos um resumo dos aspectos principais que regem o estudo da formação das grandes estruturas do universo, com um enfoque semi-relativístico da evolução temporal das perturbações de densidade.

- No capítulo 4 mostramos rapidamente os principais conceitos e equações da estatística e da teoria cinética não extensiva, que utilizaremos como base para nossos estudos.
- No capítulo 5 estão concentrados os resultados principais da tese. Mostramos os resultados de um recente trabalho[31], onde propusemos nossa função de massa dos halos baseada na estatística não-extensiva de Tsallis. Em outro recente artigo[32] analisamos as propriedades estatísticas, especialmente a normalização, de diversas distribuições (incluindo a não extensiva), e concluímos que a distribuição de Burr, uma extensão da q-exponencial, resolve o problema de normalização do formalismo de Press-Schechter. Mostramos ainda que o nosso método se ajusta às observações do catálogo de raio-X de galáxias HIFLUGCS[10] (baseado no ROSAT All-Sky Survey), com parâmetros compatíveis com o WMAP, enquanto o mesmo não se processa no método PS padrão[33]. Estudamos também a influência da *energia escura* no processo de formação de estruturas.
- No capítulo 6 a cosmologia não extensiva é ainda abordada na radiação de Bremsstrahlung, a radiação primária dos aglomerados de raio-X.
- Nos capítulos 7 e 8, apresentamos importantes tratamentos de dados dos atuais catálogos de galáxias. Essas análises conjuntas[34, 35] fornecem um melhor limite para os principais parâmetros dos modelos, objetivando eleger o candidato mais adequado para o novo paradigma cosmológico.
- No capítulo 9 apresentamos nossas conclusões e perspectivas de trabalhos futuros.
- Finalmente, no apêndice A, estudamos a aplicação do formalismo não extensivo na sonda de plasma, com claras aplicações em astrofísica experimental.

Com o intuito de facilitar uma eventual consulta de estudantes e pesquisadores, mencionamos que os capítulos 2, 3 e 4 fornecem, respectivamente, uma introdução à cosmologia, à teoria da formação de estruturas e à estatística e teoria cinética não extensiva. Essa revisão geral se torna indispensável para a compreensão das técnicas utilizadas e dos resultados obtidos nos capítulos posteriores. As contribuições originais da tese encontram-se

nos capítulos 5, 6, 7, 8, e no apêndice A (veja ainda as referências [31], [32], [33], [34] e [35]).

Capítulo 2

COSMOLOGIA

2.1 Introdução à Cosmologia do *Big Bang*

A maioria dos dados cosmológicos atuais pode ser interpretada dentro de uma estrutura coerente conhecida como o modelo cosmológico padrão, baseado na teoria da grande explosão (*Big Bang*) e no paradigma inflacionário.

Em linhas gerais, o presente modelo cosmológico é suportado por quatro fortes pilares. Temos uma estrutura teórica baseada na relatividade geral, estabelecida por Albert Einstein e Alexander A. Friedmann nos anos vinte, e três fatos observacionais robustos: primeiro, a expansão do universo, descoberta por Edwin P. Hubble nos anos trinta, como um afastamento das galáxias a uma velocidade proporcional à distância delas até nós; segundo, a abundância relativa de elementos leves, explicada por George Gamow nos anos quarenta, principalmente a de hélio, deutério e lítio, que foram cozinhadas nas reações nucleares que ocorreram por volta de um segundo a alguns minutos após o *Big Bang*, quando o universo era mais quente que o núcleo do Sol; terceiro, a Radiação Cósmica de Fundo (RCF daqui por diante), descoberta em 1965 por Arno A. Penzias e Robert W. Wilson como uma radiação de Corpo Negro extremamente isotrópica. Sua temperatura é de cerca de 3 graus Kelvin e foi emitida quando o universo era frio o bastante para formar átomos neutros, e fótons desacoplados da matéria, aproximadamente 500 mil anos depois do *Big Bang*.

De acordo com o pensamento atual, a história do universo observável é dividida em quatro fases. Primeiro há uma era inflacionária, quando a densidade de energia é domi-

nada pelo potencial de um campo de escalar. Em seguida ocorre uma era de domínio da radiação, quando a densidade de energia é dominada por partículas relativísticas que genericamente são chamadas de ‘radiação’ pelos cosmólogos. Durando até próximo à época atual, há uma era de domínio da matéria, quando a densidade de energia é dominada pela massa de partículas não-relativísticas que são chamadas ‘matéria’. A fase subsequente ao domínio da matéria ocorre em torno de $z \simeq 1$, quando o universo passa a ser dominado pela energia escura, e entra no presente regime acelerado.

2.1.1 O *Big Bang*

Na época atual o tempo de Hubble é da ordem de 10^{10} anos. A era onde o universo era muito denso e quente, e o tempo de Hubble era apenas uma minúscula fração de um segundo, é popularmente conhecida como a era do *Big Bang* Quente. O início provavelmente se encontra na época de Planck, quando o tempo de Hubble era da ordem do tempo de Planck

$$t_{\text{Pl}} = G^{1/2} = 5,39 \times 10^{-44} \text{ seg.} \quad (2.1)$$

À medida que extrapolamos de volta a essa época, os efeitos da gravidade quântica invalidam o conceito usual de espaço-tempo, criando dificuldades para as discussões referentes ao que ocorre no momento exato ou anterior ao *Big Bang*.

2.1.2 Universos de Friedmann–Robertson–Walker (FRW)

A cosmologia nasceu como ciência com o advento da relatividade geral e a consciência de que a geometria do espaço-tempo, e logo a atração geral da matéria, é determinada pelo conteúdo energético do universo [36]. O compromisso entre a matéria e a geometria é descrito pelas equações de campo de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} . \quad (2.2)$$

Esse conjunto de equações diferenciais não-lineares acopladas é muito difícil de ser resolvido sem algum “insight” sobre as simetrias do problema (o próprio universo). Einstein e Friedmann especularam que a simetria mais “razoável” para o universo deveria ser uma *homogeneidade* em todos os pontos, e *isotropia* em relação a todas as direções. Somente

após a detecção, poucas décadas atrás, do fundo de microondas cósmico (RCF) por Penzias e Wilson essa importante suposição foi amparada pela observação. A métrica mais geral satisfazendo a homogeneidade e isotropia em grandes escalas é a métrica Friedmann-Robertson-Walker (FRW), escrita aqui em termos da distância invariante $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ em quatro dimensões, $\mu = 0, 1, 2, 3$, veja a Ref.[36]:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (2.3)$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ é a métrica em uma 2-esfera. O fator de escala $a(t)$ (o tamanho físico do universo) caracteriza o tamanho relativo das seções espaciais em função do tempo. O desvio para o vermelho (*redshift*) z sofrido pela radiação de um objeto comóvel à medida que ela viaja até nós hoje é relacionada ao fator de escala no qual ela foi emitida por

$$a = \frac{a_0}{(1 + z)}. \quad (2.4)$$

O parâmetro de curvatura espacial k possui os valores $+1$, 0 , ou -1 para seções espaciais de curvatura positiva, plana, e negativa, respectivamente. Universos espacialmente hiperbólicos, planos e fechados têm diferentes geometrias.

Dependendo da dinâmica (e logo do conteúdo material-energético) do universo, teremos diferentes possíveis destinos para sua evolução. O universo poderá expandir para sempre, recolapsar no futuro, ou se aproximar de um estado assintótico.

O fluido de matéria mais geral consistente com a suposição de homogeneidade e isotropia é um fluido perfeito¹. O tensor de energia-momento associado com tal fluido pode ser escrito como[36]

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho) U^\mu U^\nu - p g^{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

onde $p(t)$ e $\rho(t)$ são a pressão isotrópica e a densidade de energia do fluido em um dado tempo na expansão, e U^μ é a velocidade comóvel quadridimensional, satisfazendo $U^\mu U_\mu = 1$.

As equações de movimento de um tal fluido em um universo em expansão podem ser deduzidas das equações de Einstein (Eq. (2.2)), onde substituímos a métrica FRW (Eq. (2.3)) e o tensor do fluido perfeito (Eq. (2.5)) para obtermos uma solução Robertson-Walker. O componente $\mu = \nu = 0$ das equações de Einstein constitui a equação de Friedmann

¹Desprezamos portanto o mecanismo de viscosidade volumar e criação de matéria

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (2.6)$$

onde nós introduzimos o parâmetro de Hubble $H \equiv \dot{a}/a$.

A conservação de energia ($T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$), uma consequência direta do fato do termo de Einstein ter divergência nula ($G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$), pode ser escrita em termos da métrica FRW e do tensor de fluido perfeito da Eq. (2.5) como

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) + p \frac{d}{dt}(a^3) = 0, \quad (2.7)$$

onde a densidade de energia e pressão podem ser separadas em suas componentes de matéria e radiação, $\rho = \rho_M + \rho_R, p = p_M + p_R$, com correspondentes equações de estado $p_M = 0, p_R = \rho_R/3$. Juntas, as equações de Friedmann e da conservação de energia dão a equação de evolução para o fator de escala

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (2.8)$$

Einstein estava interessado em encontrar soluções estáticas ($\dot{a} = \ddot{a} = 0$) devido à sua esperança de que a relatividade geral englobasse o princípio de Mach de que a matéria determinasse a inércia, e também, simplesmente, para explicar os dados astronômicos como eram entendidos na época. Um universo estático com uma densidade de energia positiva é compatível com a Eq. (2.6) se a curvatura espacial for positiva ($k = +1$) e se a densidade for apropriadamente ajustada; contudo, a Eq. (2.8) implica que \ddot{a} nunca irá desaparecer em tal espaço-tempo se a pressão p for também positiva (o que é verdadeiro para a maioria das formas de matéria, e certamente para fontes ordinárias como estrelas e gases). Einstein então propôs uma modificação de suas equações para

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.9)$$

onde Λ é um novo parâmetro livre, chamado de constante cosmológica. De fato, o lado esquerdo da Eq. (2.9) é o tensor geométrico mais geral, manifestamente covariante, divergente, simétrico, de dois índices que podemos construir somente usando a métrica e suas primeiras e segundas derivadas. Com esta modificação, as equações de Friedmann tomam a forma

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}. \quad (2.10)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.11)$$

A constante cosmológica original se tornou desnecessária quando a expansão do universo foi descoberta. No entanto, físicos teóricos de partículas viram que a constante poderia ser interpretada como uma medida da densidade de energia do vácuo. Essa densidade de energia seria a soma de um número de contribuições aparentemente não-correlacionadas, cada uma de magnitude muito maior que os limites superiores da constante cosmológica de hoje; a questão da energia do vácuo observada ser tão pequena em comparação com escalas da física de partículas se tornou um quebra-cabeças cósmico conhecido como *o problema da constante cosmológica*.

Existe um certo número de revisões sobre o que vimos até agora. Para os aspectos astrofísicos, veja Carroll, Press e Turner[37], incluindo discussões de vários tipos de testes observacionais não cobertos aqui. Para uma introdução à cosmologia, veja Kolb & Turner (1990) e Peebles (1993)[38, 39].

A Expansão do Universo

Em 1929, Edwin P. Hubble descobriu a expansão do universo. O fator de escala $a(t)$ fixa o *tamanho físico* das coordenadas espaciais \vec{x} , e a expansão não é nada mais do que uma mudança de escala (de unidades espaciais) com o tempo. Exceto para *velocidades peculiares*, i.e. movimento devido à atração local da matéria, as galáxias não se movem em coordenadas espaciais (coordenadas comóveis). Devido ao alargamento contínuo, o comprimento de onda observado dos fótons vindos de objetos distantes é maior do que quando ele é emitido, por um fator igual à razão dos fatores de escala,

$$\frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_{\text{em}}} = \frac{a_0}{a} \equiv 1 + z, \quad (2.12)$$

onde λ_{obs} é o comprimento de onda observado dos fótons vindos de objetos distantes, λ_{em} é o comprimento de onda quando emitido pela fonte dos fótons, e a_0 é o valor presente do fator de escala. Uma vez que o universo hoje é maior do que foi no passado, os comprimentos de onda observados serão deslocados no espectro em direção ao vermelho, ou como os cosmólogos dizem sofrerão um desvio para o vermelho (*redshift*), caracterizado pela quantidade z , o parâmetro de *redshift*. O parâmetro de *Hubble* é definido por $H = \dot{a}/a$, como vimos anteriormente.

O valor presente de H , denotado por H_0 , é chamado de constante de Hubble, tradicionalmente medida observando-se o *redshift* $z \equiv \Delta\lambda/\lambda$ de galáxias se afastando de nós com velocidade $v \ll 1$. A velocidade de uma dessas galáxias é dada por $v = Hr$, e seu *redshift* é apenas o deslocamento Doppler não-relativístico $z = v$, conduzindo à lei de Hubble

$$z(=v) = H_0 r_0 \quad (2.13)$$

A lei de Hubble é bem estabelecida porque distâncias *relativas* são fáceis de se estimar. É preciso apenas encontrar uma boa ‘vela padrão’, isto é, um tipo de objeto (como uma estrela ou galáxia de um dado tipo) em que todos os exemplares têm praticamente a mesma luminosidade, ou uma mesma característica a partir da qual se obtenha a luminosidade intrínseca. Então sua luminosidade aparente irá variar com a (distância)⁻³, e assim medimos as distâncias relativas. Por outro lado, para fixar H_0 , que é a constante de proporcionalidade, temos que saber a luminosidade real de um objeto, o que é muito mais difícil de se obter. Diferentes estimativas dão H_0 entre 40 a 100 km sec⁻¹ Mpc⁻¹, e é usual definirmos a quantidade h por

$$H_0 = 100h \text{ km seg}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (2.14)$$

O parâmetro h é medido entre $0.4 < h < 1$ há décadas, e apenas nos últimos anos ele foi estimado, com erro de 10%, em $h = 0.72$.

A radiação homogênea e isotrópica expande adiabaticamente (sem trocas de calor), e conseqüentemente a entropia é conservada no processo.

A Matéria e o Conteúdo Energético do Universo

As equações de Friedmann (onde daqui para a frente incluiremos os efeitos de uma constante cosmológica, incluindo a densidade de energia do vácuo ρ_Λ na densidade total ρ) implicam que, para qualquer valor do parâmetro de Hubble H , existe um valor crítico da densidade de energia tal que a geometria espacial seja plana ($k = 0$). Podemos então definir uma densidade *crítica* ρ_c para o tempo presente:

$$\rho_c \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1,88 h^2 10^{-29} \text{ g/cm}^3 \quad (2.15)$$

$$= 2,77 h^{-1} 10^{11} M_\odot / (h^{-1} \text{ Mpc})^3, \quad (2.16)$$

onde $M_{\odot} = 1.989 \times 10^{33}$ g é uma unidade de massa solar. A densidade crítica ρ_c corresponde a aproximadamente 4 prótons por metro cúbico, certamente um fluido bastante diluído! Em termos da densidade crítica é possível definir as razões $\Omega_i \equiv \rho_i/\rho_c$, para matéria, radiação, constante cosmológica e até a curvatura

$$\Omega_M = \frac{8\pi G \rho_M}{3H_0^2} \qquad \Omega_R = \frac{8\pi G \rho_R}{3H_0^2} \qquad (2.17)$$

$$\Omega_{\Lambda} = \frac{\Lambda}{3H_0^2} \qquad \Omega_K = -\frac{K}{a_0^2 H_0^2}. \qquad (2.18)$$

onde os componentes individuais i têm equações de estado muito simples da forma

$$p_i = w_i \rho_i, \qquad (2.19)$$

sendo w_i uma constante. Inserindo essas equações de estado dentro da equação de conservação da energia-momentum $\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$, para cada componente, vemos que a densidade de energia tem uma dependência em lei de potência em relação ao fator de escala,

$$\rho_i \propto a^{-n_i}, \qquad (2.20)$$

onde o expoente é relacionado ao parâmetro da equação de estado por

$$n_i = 3(1 + w_i). \qquad (2.21)$$

Para partículas massivas (“poeira” ou simplesmente “matéria”) $\rho_M \propto a^{-3}$. Para partículas relativísticas (“radiação”) $\rho_R \propto a^{-4}$. Para a energia do vácuo $\rho_{\Lambda} \propto a^0$; além disso, a Eq. (2.11) implica numa pressão negativa quando a energia do vácuo é positiva. Podemos ainda definir um parâmetro de correspondência como na equação abaixo (onde Ω_T representa o somatório de todos os demais parâmetros de densidade):

$$\Omega_k = 1 - \Omega_T; \qquad (2.22)$$

que é simplesmente a Eq. (2.6) dividida por H^2 . As equações de estado mais populares para fontes de energia cósmicas estão resumidas abaixo:

	w_i	n_i	
matéria	0	3	
radiação	1/3	4	(2.23)
“curvatura”	−1/3	2	
vácuo	−1	0	

Podemos assim escrever a taxa de expansão H^2 em termos de seu valor atual,

$$H^2(a) = H_0^2 \left(\Omega_R \frac{a_0^4}{a^4} + \Omega_M \frac{a_0^3}{a^3} + \Omega_\Lambda + \Omega_K \frac{a_0^2}{a^2} \right). \quad (2.24)$$

Podemos seguramente descartar a contribuição das partículas relativísticas na densidade total do universo hoje[38], que é dominada por partículas não relativísticas (bárions, matéria escura ou neutrinos massivos) ou por uma constante cosmológica. Podemos então escrever a equação de Friedmann hoje, $a = a_0$, como uma *lei de soma cósmica*,

$$1 = \Omega_M + \Omega_\Lambda + \Omega_K, \quad (2.25)$$

onde negligenciamos Ω_R hoje.

2.1.3 A História Térmica do Universo

Vimos que pela visão mais aceita atualmente, o universo deve ter iniciado na era de Planck (10^{19} GeV, 10^{-43} s) a partir de uma flutuação gravitacional quântica. É possível que uma era primordial de *inflação* cosmológica tenha se originado então. Logo após, o universo deve ter alcançado a era da Teoria da Grande Unificação, GUT em inglês (10^{16} GeV, 10^{-35} s). Flutuações quânticas do campo inflaton muito provavelmente deixaram suas marcas como minúsculas perturbações no universo, que de outra forma seria muito homogêneo. No final da inflação, a imensa densidade energética do campo inflaton foi convertida em partículas, que logo termalizaram e se tornaram a origem do *Big Bang* quente como o conhecemos. Tal processo é chamado *reheating* (reaquecimento) do universo. Desde então, o universo se tornou dominado pela radiação. É provável que a assimetria entre matéria e antimatéria tenha se originado ao mesmo tempo que o restante da energia do universo, do decaimento do campo inflaton. Esse processo é conhecido sob o nome de *bariogênese*, uma vez que o excesso de bárions observado no universo (a maioria quarks, naquele tempo) é um resultado da aniquilação com os antibárions.

Após isso nós temos a *nucleossíntese primordial* (1 – 0,1 MeV, 1 s – 3 min), quando prótons e nêutrons ficaram frios o suficiente para sistemas ligados poderem se formar, dando origem aos elementos mais leves, logo após o *desacoplamento dos neutrinos*. As abundâncias relativas observadas dos elementos leves estão de acordo com as previsões da teoria do *Big Bang* quente.

Atualmente, códigos numéricos da nucleossíntese do *Big Bang* computam uma cadeia de aproximadamente 30 reações nucleares acopladas, para produzir todos os elementos leves até o Berílio-7 (o restante dos elementos, até o Ferro (Fe), são produzidos em estrelas massivas, e além do Ferro em explosões de novas e supernovas). Os elementos leves mais importantes são H , ${}^4\text{He}$, D , ${}^3\text{He}$, ${}^7\text{Li}$, e talvez também ${}^6\text{Li}$, como pode ser visto na Ref.[40, 41]. A fração bariônica presente da densidade crítica pode também ser calculada como[41]

$$\Omega_{\text{B}}h^2 = 3,6271 \times 10^{-3} \eta_{10} = 0,0190 \pm 0,0024 \quad (95\% \text{ c.l.}) \quad (2.26)$$

Claramente, esse número está bem abaixo da densidade crítica, e logo os bárions não podem contar como o único componente material do universo.

Imediatamente após ocorre a aniquilação elétron-pósitron (0,5 MeV, 1 min) e toda a energia resultante se transforma em fótons. Muito depois (1 eV, $\sim 10^5$ anos), matéria e radiação têm densidades de energia equivalentes. Posteriormente, elétrons se tornam ligados aos núcleos para formarem os primeiros átomos (0,3 eV, 3×10^5 anos), em um processo conhecido como *recombinação*. Imediatamente após, os fótons se desacoplam do plasma, viajando livremente a partir de então. Estes são os fótons que nós observamos como o fundo de microondas cósmico. Muito depois ($\sim 1 - 10$ Giga-anos), as pequenas inhomogeneidades geradas durante a inflação crescem, via colapso gravitacional, para se tornarem galáxias, aglomerados e superaglomerados de galáxias, caracterizando a época da *formação de estruturas*. É o domínio da física de efeitos gravitacionais de longo alcance, talvez dominada por uma energia do vácuo na forma de uma constante cosmológica. Finalmente (3 K, 13 Giga-anos), o Sol, a Terra, e vida biológica se originaram das prévias gerações de estrelas, e de uma sopa primordial de compostos orgânicos, respectivamente.

O Fundo de Microondas

Uma das mais marcantes observações jamais feitas pela humanidade é a detecção do fundo de fótons provenientes do *Big Bang*. Esse fundo foi predito por George Gamow e colaboradores nos anos quarenta. Penzias e Wilson observaram um fraco sinal de fundo isotrópico no comprimento de onda de rádio correspondente a uma temperatura de Corpo Negro de $T_{\gamma} = 3,5 \pm 1$ K [36].

Desde então muitos experimentos diferentes confirmaram a existência do fundo de

microondas, como o satélite *Cosmic Background Explorer* (COBE). Nos dias atuais, o espectro de fótons é confirmado como um espectro de Corpo Negro perfeito com temperatura dada por

$$T_{\text{CMB}} = 2,725 \pm 0,002 \text{ K (sistemático, 95\% c.l.)} \pm 7 \mu\text{K} (1\sigma \text{ estatístico}) \quad (2.27)$$

De fato, esse é o melhor espectro de Corpo Negro jamais medido, com distorções espectrais abaixo do nível de 10 partes por milhão; é um fundo extraordinariamente isotrópico.

Logo após o COBE, outros grupos rapidamente confirmaram a detecção de anisotropias na temperatura em altos números de multipolos ou escalas angulares menores. Estas anisotropias têm um papel crucial no estudo das origens das estruturas no universo.

2.2 A Constante Cosmológica

2.2.1 Energia do Vácuo

A constante cosmológica Λ é um parâmetro dimensional com unidades de (comprimento)⁻². Do ponto de vista da física de partículas a constante cosmológica é uma medida da densidade de energia do vácuo — o estado de mais baixa energia.

Considere um campo escalar ϕ , com energia potencial $V(\phi)$. A ação pode ser escrita como[38, 42]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] \quad (2.28)$$

(onde g é o determinante do tensor métrico $g_{\mu\nu}$), e o tensor energia-momentum correspondente é[37, 42, 43]

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{2} (g^{\rho\sigma} \partial_\rho \phi \partial_\sigma \phi) g_{\mu\nu} - V(\phi) g_{\mu\nu} . \quad (2.29)$$

Na teoria, a configuração com a densidade de energia mais baixa será aquela na qual não há contribuição da energia cinética ou gradiente, implicando $\partial_\mu \phi = 0$, para a qual $T_{\mu\nu} = -V(\phi_0) g_{\mu\nu}$, onde ϕ_0 é o valor de ϕ que minimiza $V(\phi)$. Não há razão em princípio para que $V(\phi_0)$ seja nulo. O tensor energia-momentum pode então ser escrito como

$$T_{\mu\nu}^{\text{vac}} = -\rho_{\text{vac}} g_{\mu\nu} , \quad (2.30)$$

com ρ_{vac} nesse exemplo dado por $V(\phi_0)$ (essa forma para o tensor energia-momentum pode também ser argumentada de forma mais geral como sendo a única forma invariante

de Lorentz para $T_{\mu\nu}^{\text{vac}}$.) O vácuo pode então ser pensado como um fluido perfeito como na Eq. (2.5), com

$$p_{\text{vac}} = -\rho_{\text{vac}} . \quad (2.31)$$

O efeito de um tensor energia-momentum da forma da Eq. (2.30) é equivalente ao da constante cosmológica, como pode ser visto movendo o termo $\Lambda g_{\mu\nu}$ da Eq. (2.9) para o lado direito da equação e definindo

$$\rho_{\text{vac}} = \rho_{\Lambda} \equiv \frac{\Lambda}{8\pi G} . \quad (2.32)$$

Essa equivalência é a origem da identificação da constante cosmológica com a energia do vácuo.

Um campo quântico (livre) pode ser pensado como uma coleção de um infinito número de osciladores harmônicos no espaço dos momentos. Formalmente, a energia do ponto zero de uma tal coleção infinita seria também infinita (veja a Ref.[37] para maiores detalhes). Mas podemos aplicar um tipo de normalização para evitar esses problemas de “infinitos”.

A constante cosmológica final, desse ponto de vista, é a soma de um número de contribuições aparentemente discrepantes, incluindo energias potenciais de campos escalares e flutuações de ponto-zero de cada grau de liberdade da teoria dos campos, assim como uma constante cosmológica residual Λ_0 .

No modelo eletrofraco de Weinberg-Salam, esperamos uma contribuição para a energia do vácuo hoje da ordem de

$$\rho_{\Lambda}^{\text{EW}} \sim (200 \text{ GeV})^4 \sim 3 \times 10^{47} \text{ erg/cm}^3 . \quad (2.33)$$

No caso de flutuações do vácuo, devemos escolher um corte na energia a partir do ponto onde não podemos mais confiar na teoria dos campos. Se tivermos confiança em poder usar a teoria quântica dos campos a partir da escala de Planck $M_{\text{Pl}} = (8\pi G)^{-1/2} \sim 10^{18} \text{ GeV}$, esperamos uma contribuição da ordem de

$$\rho_{\Lambda}^{\text{Pl}} \sim (10^{18} \text{ GeV})^4 \sim 2 \times 10^{110} \text{ erg/cm}^3 . \quad (2.34)$$

Mas as observações cosmológicas implicam que

$$|\rho_{\Lambda}^{(\text{obs})}| \leq (10^{-12} \text{ GeV})^4 \sim 2 \times 10^{-10} \text{ erg/cm}^3 , \quad (2.35)$$

que é muito menor que qualquer dos efeitos individuais listados acima. A razão da Eq. (2.34) em relação à Eq. (2.35) é a origem da famosa discrepância de 120 ordens de magnitude entre os valores teórico e observacional da constante cosmológica. Este é o “problema da constante cosmológica”, um dos mais significantes problemas não resolvidos da física fundamental[37, 38, 42].

2.2.2 O Problema da Constante Cosmológica: Algumas possíveis Soluções

Supersimetria [44, 45]

Embora inicialmente investigada por outros motivos, a supersimetria (SUSY) teve um significativo impacto no problema da constante cosmológica, e podemos até dizer que resolveu metade dele. A SUSY é uma simetria espaço-temporal relacionando férmions e bósons entre si. Assim como simetrias ordinárias são associadas com cargas conservadas, a supersimetria é associada com “supercargas” Q_α , onde α é um índice spinorial.

Considerando teorias “globalmente supersimétricas”, que são definidas em espaço-tempo plano $Q_\alpha|\psi\rangle = 0$ para todo α , a energia desaparece automaticamente, $\langle\psi|H|\psi\rangle = 0$. No caso das flutuações do vácuo, contribuições de bósons são exatamente canceladas por contribuições iguais e opostas de férmions quando a supersimetria não se rompe. Assim, a energia do vácuo de um estado supersimétrico em uma teoria globalmente supersimétrica irá desaparecer.

Mas, em um estado onde a simetria SUSY seja quebrada, digamos, em uma escala de energia M_{SUSY} , iremos esperar uma energia do vácuo correspondente a $\rho_\Lambda \sim M_{\text{SUSY}}^4$. No mundo real, o fato de que experimentos em aceleradores não descobriram superparceiros para as partículas conhecidas do Modelo Padrão implica que M_{SUSY} é da ordem de 10^3 GeV ou maior. Então, teremos uma discrepância de

$$\frac{M_{\text{SUSY}}}{M_{\text{vac}}} \geq 10^{15} . \quad (2.36)$$

E desse modo podemos dizer que a SUSY resolve o problema da constante cosmológica, pelo menos, pela metade (em uma escala logarítmica).

Teoria das Cordas [46, 47]

Ao contrário da supergravidade, a teoria das cordas parece ser uma teoria bem definida e consistente da gravidade quântica.

A teoria das cordas é naturalmente formulada em mais do que quatro dimensões espaço-temporais, e todas as sub-teorias, junto com a supergravidade de onze dimensões, compõem os limites de uma teoria unificadora, algumas vezes chamada de teoria-M. Para trazer a teoria mais perto do mundo que observamos, as dimensões extras podem ser compactadas em uma variação em que o tensor de Ricci desaparece. Existe um grande número de possíveis compactações, muitas das quais preservam alguma, mas não toda, a supersimetria original. Se suficiente SUSY for preservada, a energia do vácuo permanecerá nula.

É claro que, para descrever nosso mundo precisamos quebrar toda a supersimetria. Então, a busca continua para uma teoria das cordas quadridimensional com simetria quebrada, e que forneça uma constante cosmológica dissipada ou muito pequena.

Outras Possibilidades

Embora a constante cosmológica seja um excelente ajuste para os dados atuais[48], as observações podem também ser acomodadas por qualquer forma de “energia escura” que não se aglomere em pequenas escalas (de modo a não serem detetadas por medições de Ω_M) e que tenha um desvio para o vermelho (*redshift*) lento à medida que o universo se expande (para levar em conta a expansão acelerada).

Um modo de parametrizar esse componente X é através de uma equação de estado efetiva, $p_X = w_X \rho_X$ [49, 50]. O intervalo relevante para w_X é entre 0 (matéria ordinária) e -1 (constante cosmológica); fontes com $w_X > 0$ desviam-se para o vermelho mais rapidamente do que a matéria ordinária (e assim causam aceleração), enquanto que $w_X < -1$ não é fisicamente adequado pelo critério da Condição de Energia Dominante (veja, contudo, a Ref.[51]). Observações atuais de supernovas, estruturas em grande escala, lentes gravitacionais, idade, fontes de rádio, fração de massa do gás e a RCF obtiveram interessantes limites sobre w_X [52, 53, 54]. A figura (2.1) mostra um exemplo, nesse caso limites através de supernovas e estruturas em grande escala sobre w_X e Ω_M em um universo plano e dominado por X e pela matéria ordinária. É claro que o valor favorável para o

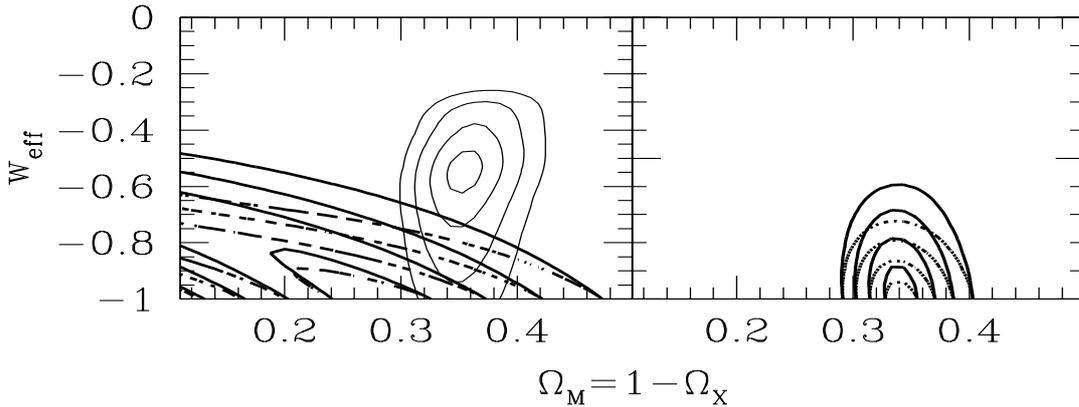


Figura 2.1: Limites dos dados de supernovas e estruturas em grande escala sobre Ω_M e sobre o parâmetro da equação de estado w_X , em um universo plano dominado por matéria e energia escura[54]. Contornos finos (à esquerda) representam limites das medidas da RCF e das estruturas em grande escala, enquanto contornos grossos são os limites vindos das observações de supernovas; linhas sólidas se aplicam a modelos com w_X constante, enquanto linhas tracejadas se aplicam a modelos de campos escalares dinâmicos. Os limites são combinados à direita.

parâmetro da equação de estado é em torno de -1 , o mesmo da constante cosmológica, embora outros valores não estejam completamente descartados.

Mas o modelo físico mais simples para um componente de energia escura é o de um campo escalar ‘rolando’ lentamente seu potencial (*slow-roll*), algumas vezes referido como “quintessência”[55, 56, 57]. Em um universo em expansão, um campo escalar espacialmente homogêneo com potencial $V(\phi)$ e mínimo acoplamento com a gravidade obedece

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (2.37)$$

onde H é o parâmetro de Hubble, os pontos indicam derivadas temporais, e as linhas indicam derivadas com respeito a ϕ . A densidade de energia é $\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)$, e a pressão é $p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$, implicando em um parâmetro da equação de estado da forma

$$w = \frac{p}{\rho} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)}, \quad (2.38)$$

que irá geralmente variar com o tempo. Então, quando o campo varia lentamente e $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$, teremos $w \sim -1$, e o potencial do campo escalar age como uma constante cosmológica.

Substituindo um parâmetro constante como Λ por um campo dinâmico poderíamos evitar a necessidade do ajuste fino que inevitavelmente acompanha a constante cosmológica.

Existem muitos modelos específicos da física de partículas para o campo de quintessência. Alguns são baseados em teorias de gauge supersimétricas, supergravidade, dimensões extras (pequenas e grandes), e também na possibilidade de que o campo escalar responsável pela inflação possa também servir como quintessência[58], embora essa proposta tenha sido criticada por produzir relíquias (relics) indesejáveis e flutuações de isocurvatura[59].

Outros modelos mais exóticos de energia escura são baseados em campos escalares aproximadamente não-massivos. Um desses cenários é a matéria escura “sólida”, tipicamente baseada em cordas cósmicas enroscadas ou paredes de domínio (domain walls). As cordas dão um parâmetro de equação de estado $w_{\text{string}} = -1/3$, e as paredes dão $w_{\text{wall}} = -2/3$.

2.3 Determinação dos Parâmetros Cosmológicos

2.3.1 O “*Lookback Time*”

O *lookback time* do tempo presente para um objeto no *redshift* z_* é dado por

$$\begin{aligned} t_0 - t_* &= \int_{t_*}^{t_0} dt \\ &= \int_{1/(1+z_*)}^1 \frac{da}{aH(a)}, \end{aligned} \tag{2.39}$$

A idade do universo é obtida tomando o limite $z_* \rightarrow \infty$ ($t_* \rightarrow 0$).

Para $\Omega_T = \Omega_M = 1$, o comportamento $a \propto t^{2/3}$ determina a solução

$$t_0 = \frac{2}{3} H_0^{-1}. \tag{2.40}$$

A idade decresce à medida que Ω_M aumenta, e a idade aumenta à medida que Ω_Λ aumenta. A figura 2.2 mostra a história da expansão do universo para diferentes valores desses parâmetros, mantendo H_0 fixo; é claro o modo como a aceleração causada por Ω_Λ leva a um universo mais velho. Existem aproximações analíticas que estimam a equação (2.39) em vários regimes[38, 37], mas geralmente a integral é obtida numericamente. Podemos

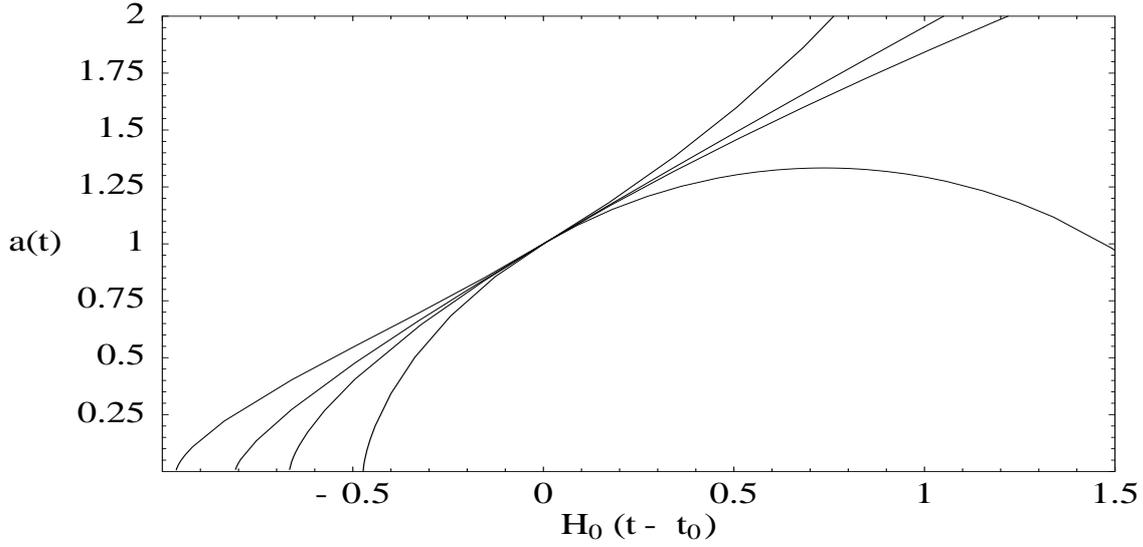


Figura 2.2: Histórias de expansão para diferentes valores de Ω_M e Ω_Λ . De cima para baixo, as curvas descrevem $(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (0.3, 0.7)$, $(0.3, 0.0)$, $(1.0, 0.0)$, e $(4.0, 0.0)$.

então usar estas relações como um teste de consistência entre as observações cosmológicas de H_0 , Ω_M , Ω_Λ and t_0 . Como exemplo podemos estimar o parâmetro de Hubble: usando a equação (2.40) teremos, para $\Omega = \Omega_M = 1$

$$t_0 = \frac{2}{3}H_0^{-1} = 6,5 \times 10^9 h^{-1} \text{ anos}, \quad (2.41)$$

e o menor valor estimado como $\Omega_0 \simeq 0,1$ gives

$$t_0 = 0,9H_0^{-1} = 8,8 \times 10^9 h^{-1} \text{ anos}; \quad (2.42)$$

claro que não podemos medir a idade do universo diretamente, e sim apenas a idade de seus constituintes internos; um limite superior da idade do universo é provido pela idade das estrelas mais antigas (observadas em aglomerados globulares), que é maior do que $1,0 \times 10^{10}$ anos. Com o valor estimado de $\Omega_0 = 1$ a idade do universo requer $h < 0,65$, enquanto que com $\Omega_0 = 0,1$ o limite é de $h < 0,88$.

2.3.2 A Distância Luminosidade

A *luminosidade absoluta* L de uma fonte não é nada mais do que a energia total emitida por unidade de tempo. Uma *vela padrão* é um objeto luminoso cuja luminosidade

absoluta é conhecida, com certa margem de erro. Por exemplo, estrelas variáveis Cefeidas e supernovas tipo Ia são consideradas boas velas padrões. O fluxo de energia F recebido no detetor é a energia medida por unidade de tempo por unidade de área do detetor, vindos da fonte. A distância luminosidade d_L é então definida como o raio da esfera centrada na fonte na qual a luminosidade absoluta daria o fluxo observado $F \equiv L/4\pi d_L^2$.

Em um universo Friedmann-Robertson-Walker, a luz viaja através de geodésicas nulas, $ds^2 = 0$, que determinam a distância coordenada $r = r(z, H_0, \Omega_M, \Omega_\Lambda)$, como uma função do *redshift* z e de outros parâmetros cosmológicos. Agora considerando o efeito da expansão do universo no fluxo observado vindo de uma fonte em um certo *redshift* z distante de nós, o fluxo total detetado será

$$F = \frac{L}{4\pi a_0^2 r^2(z)} \equiv \frac{L}{4\pi d_L^2}. \quad (2.43)$$

A expressão final para a distância luminosidade d_L como função do *redshift* é então dada por[38]

$$H_0 d_L = (1+z) |\Omega_k|^{-1/2} \text{sen} \left[|\Omega_k|^{1/2} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{(1+z')^2(1+z'\Omega_M) - z'(2+z')\Omega_\Lambda}} \right], \quad (2.44)$$

onde $\text{sen}(x) = x$ se $k = 0$; $\text{sen}(x)$ se $k = +1$ e $\text{senh}(x)$ se $k = -1$. Expandindo a expressão acima até segunda ordem em torno de $z = 0$, obtemos

$$H_0 d_L = z + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Omega_M}{2} + \Omega_\Lambda \right) z^2 + O(z^3). \quad (2.45)$$

O primeiro termo corresponde à lei de Hubble. Somente muito recentemente as observações cosmológicas foram longe o suficiente no universo primordial para discutirmos as contribuições em z^2 .

2.3.3 Medidas da Distância

A medida das distâncias pode ser extraída de quantidades observacionais. Em cosmologia existem duas distâncias fundamentais, a distância luminosidade e a distância de diâmetro angular. A distância luminosidade é definida por

$$d_L \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi F}}, \quad (2.46)$$

onde L é a luminosidade intrínseca e F o fluxo medido. A distância de diâmetro angular, por sua vez, é definida pela equação abaixo:

$$d_A \equiv \frac{D}{\theta}, \quad (2.47)$$

onde D é o tamanho próprio do objeto e θ seu tamanho angular aparente.

Cosmologicamente, as medidas de distância são relacionadas por

$$d_L = (1 + z)^2 d_A, \quad (2.48)$$

desse modo qualquer uma delas pode ser convertida na outra, para fontes com *redshift* conhecido.

2.3.4 A Taxa de Expansão H_0

Este é um parâmetro fundamental para a astrofísica e para a cosmologia. Por volta de 1929, Hubble mediu a taxa de expansão como sendo $H_0 = 600 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, o que implicava uma idade do universo da ordem de $t_0 \sim 2$ Giga-anos, em claro conflito com a idade da Terra, dada pela geologia[60]. Os dados de Hubble eram baseados nas velas padrões Cefeidas, que foram incorretamente calibradas. Nos últimos 15 anos tivemos significantes progressos na busca por uma determinação acurada de H_0 . Tais desenvolvimentos vieram da troca das velhas placas fotográficas pelos CCDs (Charged Couple Devices, i.e. detectores de estado sólido com excelente sensibilidade de fluxo por pixel), e por refinamentos de métodos existentes para medir distâncias extragaláticas (e.g. paralaxes, Cefeidas, supernovas, etc.). Finalmente, temos ainda o desenvolvimento de métodos completamente novos e independentes para determinarmos H_0 : a) Lentes gravitacionais; b) Efeito Sunyaev-Zel'dovich; c) Escala de distâncias extragaláticas, principalmente as baseadas nas Cefeidas e Supernovas tipo Ia; d) Anisotropias do fundo de microondas. Vamos revisar nesta seção os dois primeiros, pois os demais serão vistos depois, com maior detalhe.

Lentes Gravitacionais

Uma medida do atraso temporal e da separação angular de diferentes imagens das variações de um quasar pode ser usada para determinarmos H_0 com boa precisão.

Supondo um espaço plano com $\Omega_M = 0,25$, Grogin & Narayan obtiveram[61]

$$H_0 = 72 \pm 7 (1\sigma \text{ estatístico}) \pm 15\% (\text{sistemático}) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (2.49)$$

No caso de deflexão por um aglomerado de galáxias, a distribuição de matéria escura nestes sistemas é normalmente desconhecida, associada com um complicado potencial de aglomeração. Esse método está ainda começando a dar resultados interessantes e, em futuro próximo, as perspectivas de medirmos H_0 e baixarmos suas incertezas com esta técnica são bastante promissoras.

Efeito Sunyaev-Zel'dovich (ESZ)

O colapso gravitacional de bárions nos poços de potencial gerados pela matéria escura propiciaram a reionização do plasma, gerando um plasma eletrônico dentro dos aglomerados de galáxias. O espalhamento Compton inverso dos fótons do fundo de microondas cósmico pelos elétrons do gás resulta em uma distorção mensurável do espectro da radiação cósmica de 3K, conhecido como efeito Sunyaev-Zel'dovich. Uma vez que os fótons adquirem energia extra dos elétrons do gás, esperamos um deslocamento para altas frequências do espectro, $(\Delta\nu/\nu) \simeq (k_B T_{\text{gas}}/m_e c^2) \sim 10^{-2}$. Isso corresponde a um *decréscimo* da temperatura do fundo de microondas a baixas frequências (região de Rayleigh-Jeans) e um *acréscimo* a altas frequências, veja a Ref.[62]. Podemos determinar desse efeito a distância ao aglomerado, e a partir dela a constante de Hubble H_0 .

Uma das vantagens desse método é que o ESZ é independente do *redshift* e, portanto, pode ser aplicado para grandes distâncias. Análises recentes, baseadas no ESZ, fornecem para a constante de Hubble o valor[35, 63]

$$H_0 = 76 \pm 5 (1\sigma \text{ estatístico}) \pm 15\% (\text{sistemático}) \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}, \quad (2.50)$$

compatível com outros métodos.

2.3.5 O Conteúdo de Matéria Ω_M

A partir dos anos 70 a existência da matéria escura começou a ser considerada com mais seriedade. Naquele tempo já havia um acúmulo de evidências de que a curva de rotação das galáxias não caía com o aumento do raio destas e que a massa dinâmica aumentava com a escala, de galáxias individuais até aglomerados de galáxias. Desde então, novas possíveis fontes extras para o conteúdo de matéria do universo tem sido

propostas:

$$\Omega_M = \Omega_{B, \text{lum}} \quad (\text{estrelas em galáxias}) \quad (2.51)$$

$$+ \Omega_{B, \text{dark}} \quad (\text{MACHOs?}) \quad (2.52)$$

$$+ \Omega_{\text{CDM}} \quad (\text{fracamente interagente : axion, neutralino?}) \quad (2.53)$$

$$+ \Omega_{\text{HDM}} \quad (\text{neutrinos massivos?}) \quad (2.54)$$

Muitos testes cosmológicos limitam alguma combinação de Ω_M and Ω_Λ . É difícil limitar Ω_M sozinho. Quase todos os métodos na verdade limitam alguma combinação de Ω_M e a constante de Hubble $h = H_0/(100 \text{ km/s/Mpc})$; o HST Key Project encontrou, em escalas de distância extragaláticas, $h = 0,72 \pm 0,08$, o que é consistente com outros métodos[60], e resultado que vou assumir abaixo.

Por anos, determinações de Ω_M baseadas na dinâmica de galáxias e aglomerados forneceram valores entre 0,1 e 0,4 — claramente maiores que o parâmetro de densidade de bárions inferido pela nucleossíntese primordial, $\Omega_B = (0,019 \pm 0,001)h^{-2} \approx 0,04$ [41], mas também claramente menores que a densidade crítica. Os resultados quantitativos permaneceram imutáveis até agora, mas nossa confiança neles aumentou consideravelmente.

O conteúdo de matéria do universo pode ser deduzido de várias formas: da razão massa-luminosidade de vários objetos no universo; da curva de rotação das galáxias; de microlentes; da busca direta de objetos de halo compacto massivo (Massive Compact Halo Objects - MACHOs); da dispersão de velocidades de aglomerados com o uso do teorema de Virial; da fração de bárions no gás de raios-X dos aglomerados; de lentes gravitacionais fracas; da distribuição da matéria observada do universo via seu espectro de potências; da abundância dos aglomerados e sua evolução; da detecção direta de neutrinos massivos; da detecção direta das partículas massivas fracamente interagentes (Weakly Interacting Massive Particles - WIMPs); da idade de aglomerados e objetos velhos (galáxias e outros), e finalmente das anisotropias do fundo de microondas cósmico. Vamos revisar brevemente apenas algumas delas.

Matéria Luminosa

Esse método de estimar Ω_M é estabelecido ao se medir a luminosidade de estrelas em galáxias e daí estimar a razão massa-luminosidade, definida como a massa pela densidade de luminosidade observada de um objeto, $\Upsilon = M/L$. Essa razão é usualmente expressada em unidades solares, M_\odot/L_\odot , tal que para o Sol $\Upsilon_\odot = 1$. A luminosidade das estrelas depende muito sensivelmente de suas massas e do estágio de evolução. A razão massa-luminosidade das estrelas na vizinhança do Sol é da ordem de $\Upsilon \approx 3$. Para aglomerados globulares e galáxias espirais podemos determinar suas massas e luminosidades independentemente, e elas dão $\Upsilon \approx$ pouco menos de 10. Para nossa galáxia,

$$L_{\text{gal}} = (1,0 \pm 0,3) \times 10^8 h L_\odot \text{Mpc}^{-3} \quad \text{e} \quad \Upsilon_{\text{gal}} = 6 \pm 3. \quad (2.55)$$

Toda a matéria luminosa no universo, de galáxias, aglomerados de galáxias, etc., permite um valor de $\Upsilon \approx 10$, e assim[64]

$$0,002 \leq \Omega_{\text{lum}} h \leq 0,006. \quad (2.56)$$

Como consequência, a matéria luminosa sozinha está longe da densidade crítica. Ainda, se compararmos com a quantidade de bárions da nucleossíntese primordial (Eq. (2.26)), concluímos que $\Omega_{\text{lum}} \ll \Omega_B$ e, portanto, deve haver uma grande fração de bárions que são escuros, talvez na forma de estrelas ou planetas.

Estudos aplicando o teorema de Virial à dinâmica dos aglomerados obtiveram tipicamente valores de $\Omega_M = 0,2 \pm 0,1$ [65, 66]. Embora seja possível que o valor global de M/L tenha diferenças apreciáveis do valor nos aglomerados, extrapolações das escalas menores não parecem alcançar a densidade crítica[67]. Novas técnicas para “pesar” os aglomerados, incluindo lentes gravitacionais de galáxias de fundo e perfis de temperatura dos gases de raio-X, embora não estejam ainda em perfeito acordo entre si, sugerem essencialmente conclusões semelhantes.

Curvas de Rotação das Galáxias Espirais

As curvas de rotação planas das galáxias espirais constituem as evidências mais diretas para a existência de grandes quantidades de matéria escura. Galáxias espirais consistem de um bojo central e um disco muito fino, estabilizada contra o colapso gravitacional pela

conservação de momento angular, e envolvida por um halo aproximadamente esférico de matéria escura. Podemos medir as velocidades orbitais de objetos em torno do disco como função do raio através dos desvios Doppler de suas linhas espectrais. As velocidades orbitais aumentam linearmente do centro para fora até alcançarem um valor típico de 200 km/s, e então permanecem planas (sem alteração ao longo do raio) até uma distância radial apreciável. Isso era completamente inesperado uma vez que a luminosidade superficial observada do disco cai exponencialmente com o raio, $I(r) = I_0 \exp(-r/r_D)$, veja a Ref.[68]. Então, esperaríamos que a maior parte da massa galáctica ficasse concentrada em umas poucas distâncias radiais do disco r_D , tal que a velocidade de rotação fosse determinada como em uma órbita Kepleriana, $v_{\text{rot}} = (GM/r)^{1/2} \propto r^{-1/2}$. Nenhum comportamento semelhante foi observado. A curva de rotação medida é mostrada na Fig. 2.3 junto com as componentes relativas associadas com o disco, o halo e o gás.

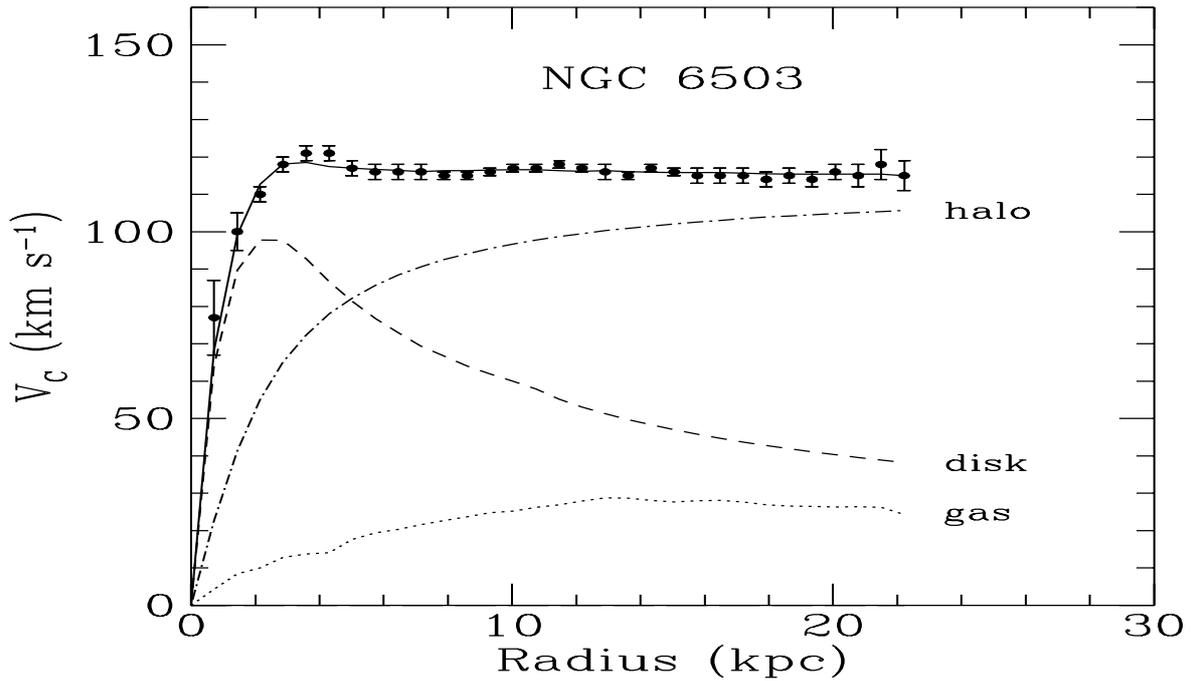


Figura 2.3: A curva de rotação da galáxia espiral NGC 6503, determinada pelas observações por rádio do gás de hidrogênio no disco[69]. A linha tracejada mostra a curva de rotação esperada apenas do material do disco, e a linha com traços e pontos mostra apenas o halo de matéria escura.

Em grandes distâncias radiais a distribuição de matéria escura gera uma curva de rotação plana. Adicionando toda a matéria nos halos galácticos até um raio máximo, achamos $\Upsilon_{\text{halo}} \geq 30 h$, e então

$$\Omega_{\text{halo}} \geq 0,03 - 0,05. \quad (2.57)$$

Fração de Bárions em Aglomerados

Em vez de medir a massa relativa à densidade de luminosidade, que pode ser diferente dentro e fora dos aglomerados, nós podemos medi-la também com respeito à densidade de bárions[70], o que significa ter o mesmo valor nos aglomerados e em qualquer parte do universo, simplesmente porque não há meio de segregar os bárions da matéria escura nessas grandes escalas. A maioria da massa bariônica está no gás quente interaglomerado[71]. Desde os anos 60, quando telescópios de raios-X se tornaram disponíveis, é conhecido que aglomerados de galáxias são as fontes mais poderosas de raios-X no céu[72]. A emissão se estende sobre todo o aglomerado e revela a existência de um plasma quente com temperatura $T \sim 10^7 - 10^8$ K, onde os raios-X são produzidos pela radiação de Bremsstrahlung. Assumindo que o gás está em equilíbrio hidrostático e aplicando o teorema de Virial podemos estimar a massa total no aglomerado, tendo acordo geral (dentro de um fator de 2) com as estimativas da massa de Virial. Dessas estimativas podemos calcular a fração de bárions dos aglomerados como

$$f_{\text{B}} h^{3/2} = 0,03 - 0,08 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Omega_{\text{B}}}{\Omega_{\text{M}}} \approx 0,15, \quad \text{para } h = 0,65, \quad (2.58)$$

o que junto com a Eq. (2.56) indica que aglomerados contêm muito mais matéria bariônica na forma de gás quente do que na forma de estrelas nas galáxias.

A fração f_{gas} da massa total nesta forma pode ser medida tanto pela observação direta de raios-X do gás[73] quanto pelas distorções do fundo de microondas pelo espalhamento de elétrons quentes (ESZ).

Assumindo que a fração seja representativa do universo inteiro, e usando o valor da nucleossíntese do Big-Bang, $\Omega_{\text{B}} = 0,05 \pm 0,01$, para $h = 0,65$ nós encontramos

$$\Omega_{\text{M}} = 0,3 \pm 0,1 \text{ (estatístico)} \pm 20\% \text{ (sistemático)}. \quad (2.59)$$

Esse valor é consistente com determinações prévias de Ω_{M} .

Formação de Estruturas e o Espectro de Potências da Matéria

O parâmetro de densidade da matéria também pode ser extraído de medidas do espectro de potência das flutuações de densidade (veja por exemplo [74]). Um dos mais importantes limites na quantidade de matéria no universo vem da distribuição presente das galáxias. Instabilidades gravitacionais aumentam os contrastes de densidade primordiais, vistos na última superfície de espalhamento (Last Scattering Surface - LSS) como anisotropias na temperatura da RCF, até alcançarem o campo de densidades presente, responsável pelas estruturas em grandes e pequenas escalas do universo.

Uma vez que o espectro primordial é muito aproximadamente representado por um *campo randômico Gaussiano* invariante de escala, o melhor modo de apresentar os resultados da formação de estruturas é trabalhando com as funções de correlação de 2-pontos no espaço de Fourier, o assim chamado *espectro de potência*. Se o espectro reprocessado de inhomogeneidades permanece Gaussiano, o espectro de potências será tudo o que precisamos para descrever a distribuição das galáxias. Efeitos não-Gaussianos podem surgir do colapso gravitacional não-linear das estruturas, e podem ser importantes em pequenas escalas[39].

O espectro de potências mede o grau de inhomogeneidade na distribuição de massa em diferentes escalas. Ele depende de poucos ingredientes básicos: a) o espectro primordial de inhomogeneidades, se ele é Gaussiano ou não-Gaussiano, se é *adiabático* (perturbado na densidade de energia) ou de *isocurvatura* (perturbado na densidade de entropia), se tem *tilt* (desvios da invariância escalar), etc.; b) a criação recente de inhomogeneidades, se *cordas cósmicas* ou algum outro defeito topológico oriundo de uma primeira transição de fase seriam responsáveis pela formação de estruturas hoje, e c) a evolução cósmica das inhomogeneidades, se o universo tem sido dominado por matéria escura fria ou quente ou por uma constante cosmológica desde o início da formação de estruturas, dependendo da taxa de expansão do universo.

As ferramentas usadas para a comparação entre o espectro de potências observado e o predito são simulações numéricas de N-corpos muito precisas, e modelos teóricos que predizem a *forma* mas não a *amplitude* do espectro de potências presente. Em modelos simples (*e.g.*, com apenas matéria escura fria e bárions, sem neutrinos massivos), o espectro pode ser ajustado (uma vez que a amplitude é normalizada) por um único

“parâmetro de forma”, que foi predito ser igual a $\Gamma = \Omega_M h$. Observações então permitem $\Gamma \sim 0,25$, ou $\Omega_M \sim 0,36$. Uma comparação cuidadosa entre modelos e observações é apresentada no artigo de Liddle *et al.*[75].

Os limites observacionais no espectro de potências têm uma ampla gama de medições em escalas bastante diferentes, como das abundâncias observadas nos aglomerados, em escalas de 10 Mpc, até as flutuações da RCF, em escalas de 1000 Mpc, que determinam a normalização do espectro. No presente, catalogações de altos *redshifts* estão sondando escalas entre 100 e 1000 Mpc, o que já nos permite visualizar a influência correspondente ao pico do espectro de potências em k_{eq} (veja as Figs. 3.1 e 3.2). De fato, Eisenstein *et al.*[221] apresentaram recentemente a função de correlação em grande escala do catálogo Sloan Digital Sky Survey (SDSS), mostrando clara evidência de um pico acústico de bárions na escala $100h^{-1}$ Mpc, o que está em excelente acordo com as previsões do WMAP retiradas dos dados da RCF. O método da oscilação acústica dos bárions (Baryon Acoustic Oscillations - BAO) já está inclusive sendo utilizado para quebrar a degenerescência dos parâmetros cosmológicos atuais (sobre isso, veja em especial a referência [35], e o apêndice 8 da presente tese). O modelo padrão CDM com $\Omega_M = 1$, normalizado para as flutuações da RCF a grandes escalas, é inconsistente com a abundância dos aglomerados. Já o espectro de potências de um modelo plano com constante cosmológica ou um universo aberto com $\Omega_M = 0,3$ (definidos como modelos Λ CDM e OCDM, respectivamente) podem ser normalizados de tal forma que eles concordem com a RCF e com as observações dos aglomerados. Assim, no presente, tais medidas sugerem um valor baixo de Ω_M , mas com grandes incertezas.

2.3.6 A Constante Cosmológica Ω_Λ

A partir de meados dos anos 80, iniciou-se a suspeita de que uma cosmologia com constante cosmológica de valor apreciável daria o melhor ajuste para o que conhecemos sobre o universo[76, 77]. Contudo, foi apenas muito recentemente que apareceram novos argumentos observacionais para um valor não-nulo de Λ . Os mais convincentes são as recentes evidências de que vivemos em um universo plano, fornecidas pelas observações das anisotropias da RCF, juntas com fortes indicações de um universo com baixa densidade de massa ($\Omega_M < 1$); das distribuições em grande escala das galáxias, aglomerados e vazios,

que indicam que algum tipo de energia escura deve preencher o restante da densidade de energia até o valor crítico, i.e. $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_M$; ainda, a discrepância entre as idades de aglomerados globulares e a idade de expansão para o universo pode ser claramente solucionada com um $\Lambda \neq 0$; finalmente, existem crescentes evidências de um universo acelerado vindas das observações de supernovas distantes[78]. Vamos agora discutir os diferentes argumentos aqui apresentados.

O Problema da Idade de Expansão do Universo

A pressão negativa acelera o universo e reconcilia a idade de expansão do universo com as idades de estrelas em aglomerados globulares. Para a presente idade do universo de $t_0 = 13 \pm 1$ Giga-anos, e a taxa de expansão medida de $H_0 = 70 \pm 7$ km/s/Mpc, encontramos $t_0 H_0 = 0,93 \pm 0,12$ (adicionando erros em quadratura), o que corresponde a $\Omega_M = 0,05^{+0,24}_{-0,10}$ para um universo aberto; um resultado marginalmente consistente com as observações de estruturas em grandes escalas. Por outro lado, para um universo plano com constante cosmológica (acelerado), $t_0 H_0 = 0,93 \pm 0,12$ corresponde a $\Omega_M = 0,34^{+0,20}_{-0,12}$, o que é perfeitamente compatível com as observações recentes. Isso sugere que provavelmente vivemos em um universo plano que está acelerando, dominado hoje por uma densidade de energia do vácuo.

Supernovas Ia

Astrônomos medem distâncias em termos do “módulo da distância” $m - M$, onde m é a magnitude aparente da fonte e M é sua magnitude absoluta. O módulo da distância é relativo à distância luminosidade via

$$m - M = 5 \log_{10}[d_L(\text{Mpc})] + 25 . \quad (2.60)$$

Claro, é fácil medir a magnitude aparente, mas notoriamente difícil inferir a magnitude absoluta de um objeto distante. Recentemente, significativo progresso tem sido feito usando supernovas Ia como “velas padrão”. Supernovas são muito brilhantes e podem então ser detetadas em altos *redshifts* ($z \sim 1$).

Estudando as curvas luminosas características, de uma amostra estatística razoavelmente grande, cosmólogos de dois grupos diferentes, o *Supernova Cosmology Project*[79]

e o *High-Redshift Supernova Project* [80], estão confiantes de poder inferir de suas distribuições a curvatura espacial e a taxa de expansão do universo. A Fig. 2.4 mostra os resultados para $m - M$ versus z para o Supernova Cosmology Project. Sob a suposição de que a densidade de energia do universo é dominada pela matéria e pelo vácuo, estes dados podem ser convertidos nos limites sobre Ω_M e Ω_Λ , como mostrado na Fig. 2.5.

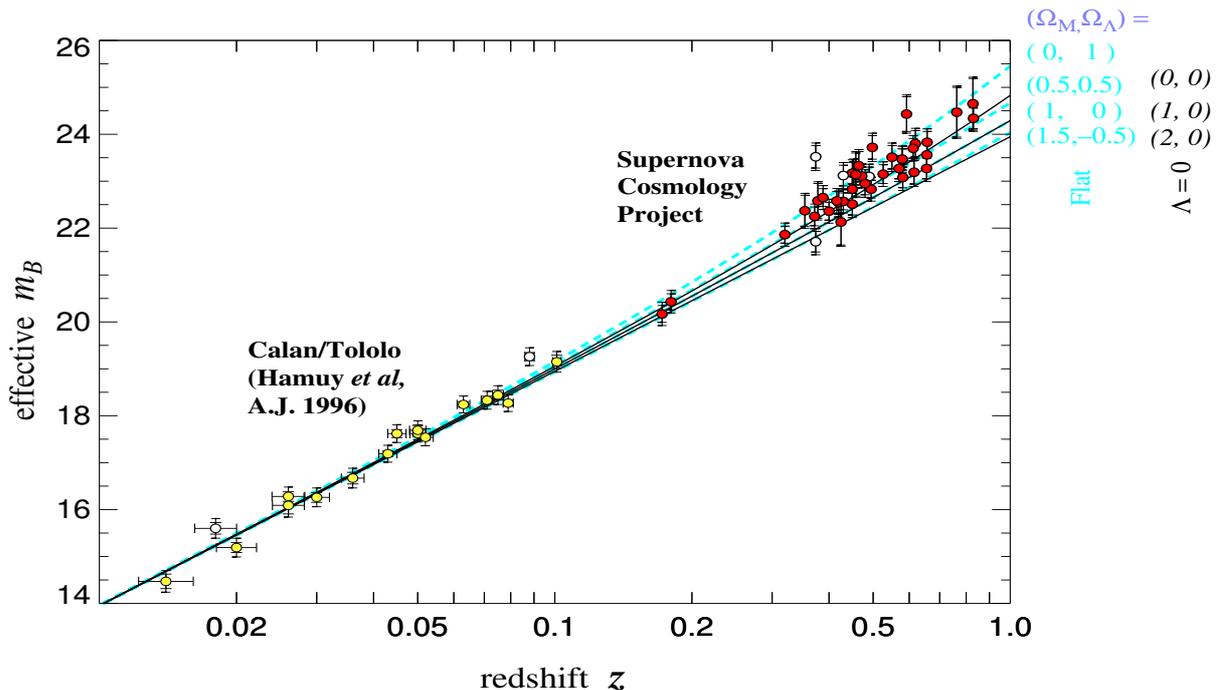


Figura 2.4: Diagrama de Hubble para supernovas em altas *redshifts* descobertas pelo *SN Cosmology Project*[79]. Um diagrama similar foi obtido pelo *High-Redshift Supernova Project*[80]. Ambos os grupos concluíram que as supernovas distantes são menos brilhantes do que o esperado, e esse efeito poderia ser explicado por um universo acelerado.

Nestas observações, as supernovas do tipo Ia em altas *redshifts* parecem menos brilhantes do que o esperado para os universos abertos ($\Omega_M < 1$) e planos ($\Omega_M = 1$), como mostra a Fig. 2.4. De fato, o universo parece estar acelerando ao invés de desacelerando (como era esperado, pela atração geral da matéria); alguma coisa parece estar agindo como uma força repulsiva a muito grandes escalas. A explicação mais simples para este efeito é admitir a existência de uma constante cosmológica, uma energia do vácuo difusa que permeia todo o espaço e, como explicado acima, dá ao universo uma aceleração que tende a separar sistemas ligados gravitacionalmente entre si. Para um universo plano ($\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$), os

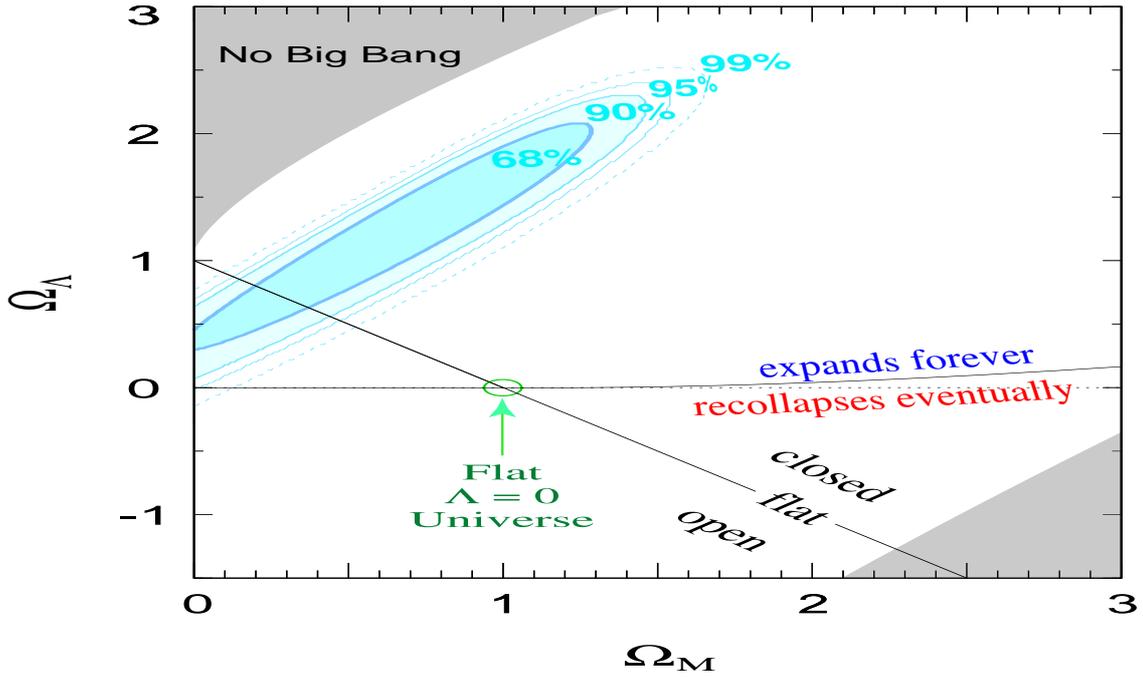


Figura 2.5: As regiões de melhor ajuste de confiança estatística (68% – 99% c.l.) no plano $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$, para os resultados das supernovas em altos *redshifts*. Observações atuais desfavorecem o modelo Einstein-de Sitter (círculo) em vários desvios padrões[79].

valores de melhor ajuste para a análise conjunta de ambos os grupos[79, 80] são

$$\Omega_M^{\text{plano}} = 0,28^{+0,09}_{-0,08} \text{ (1}\sigma \text{ estatístico) }^{+0,05}_{-0,04} \text{ (sistemático)}, \quad (2.61)$$

$$\Omega_\Lambda^{\text{plano}} = 0,72^{+0,08}_{-0,09} \text{ (1}\sigma \text{ estatístico) }^{+0,04}_{-0,05} \text{ (sistemático)}. \quad (2.62)$$

Os intervalos de confiança no plano Ω_M - Ω_Λ são consistentes para os dois grupos. Ambos os times favorecem uma constante cosmológica positiva, e descartam fortemente o tradicional modelo de universo $(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (1, 0)$. Os resultados são inconsistentes com um universo aberto com constante cosmológica nula.

O Fundo de Microondas Cósmico

A descoberta pelo satélite COBE de anisotropias na temperatura do fundo de microondas cósmico[81] inaugurou uma nova era na determinação dos parâmetros cosmológicos. Para caracterizar as flutuações de temperatura no céu, podemos decompô-las em harmônicos esféricos,

$$\frac{\Delta T}{T} = \sum_{lm} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (2.63)$$

e expressar o montante de anisotropia no momento de multipolo l via o espectro de potências

$$C_l = \langle |a_{lm}|^2 \rangle. \quad (2.64)$$

Altos multipolos correspondem a pequenas separações angulares no céu, $\theta = 180^\circ/l$. Com qualquer família de modelos, C_l versus l dependerá dos parâmetros especificando uma cosmologia em particular. Embora o caso esteja longe de estar fechado, evidências têm sido angariadas em favor de uma classe específica de modelos — os baseados em perturbações Gaussianas, adiabáticas e aproximadamente livres de escala, em um universo composto por bárions, radiação e matéria escura fria (o cenário de universo inflacionário tipicamente prediz estes tipos de perturbações).

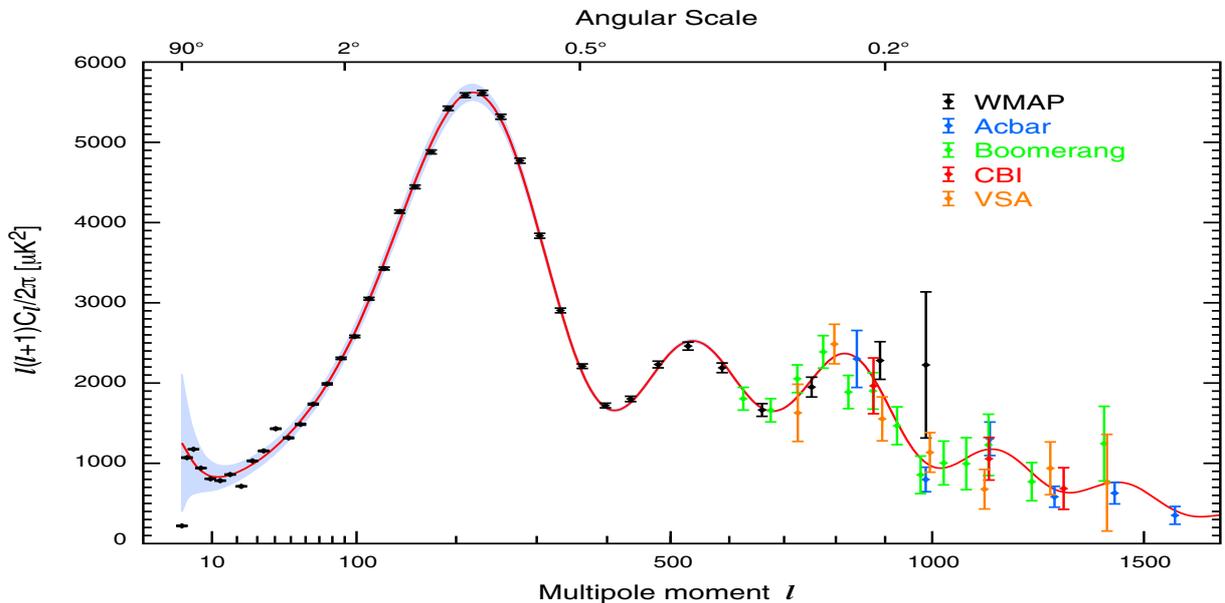


Figura 2.6: O espectro de potências do terceiro ano do WMAP (em preto) comparado a outros recentes levantamentos do espectro angular de potências da RCF, incluindo o Boomerang, Acbar, CBI, e VSA. Para melhor visualização, os dados com $l < 600$ do Boomerang e VSA são omitidos, por terem medidas consistentes com o WMAP, mas de menores pesos. É evidente nessa figura o pico em aproximadamente $l_{\text{peak}} \sim 200$, predito teoricamente para um universo espacialmente plano. A precisão alcançada pelo WMAP, com sensibilidade aumentada nas menores escalas angulares, faz com que ele seja hoje uma importante fonte de calibração para experimentos de alta resolução.[5]

A localização em l do primeiro “pico Doppler”, um aumento de força devido às

oscilações acústicas, é uma das ferramentas mais úteis na determinação da densidade energética cósmica. O primeiro pico (aquele no l mais baixo) corresponde à escala angular subtendida pelo raio de Hubble H_{CMB}^{-1} no tempo quando a RCF foi formada (escala conhecida como de “desacoplamento” ou “recombinação” ou ainda “última superfície de espalhamento”). A escala angular na qual nós observamos este pico está amarrada à geometria do universo: em um universo negativamente (positivamente) curvo, o caminho dos fótons diverge (converge), levando a um maior (menor) tamanho angular aparente quando comparado a um universo plano. Uma vez que a escala H_{CMB}^{-1} é dada principalmente pela microfísica, esse efeito geométrico é dominante, e podemos relacionar a curvatura espacial, caracterizada por Ω , ao pico observado no espectro da RCF via[82]

$$l_{\text{peak}} \sim 220\Omega^{-1/2} . \quad (2.65)$$

Mais detalhes sobre o espectro (tamanho do pico, características dos picos secundários) irão depender de outras quantidades cosmológicas, como a constante de Hubble e a densidade de bárions.

A figura 2.6 mostra o espectro de potências do terceiro ano do WMAP (em preto) comparado a outros recentes levantamentos do espectro angular de potências da RCF. A precisão alcançada pelo WMAP nas menores escalas angulares faz com que ele seja hoje uma importante fonte de calibração para experimentos de alta resolução. É evidente nessa figura o pico em aproximadamente $l_{\text{peak}} \sim 200$, predito teoricamente para um universo espacialmente plano[5].

Os dados da RCF promovem limites que são complementares àqueles obtidos usando supernovas. Por exemplo, o Boomerang[83] e o método das supernovas permitem contornos de confiança que são aproximadamente ortogonais no plano $\Omega_{\text{M}}-\Omega_{\Lambda}$. A região de sobreposição está na vizinhança de $(\Omega_{\text{M}}, \Omega_{\Lambda}) = (0,3, 0,7)$, o que é consistente com outros métodos e medidas.

2.3.7 A Curvatura Espacial Ω_K

Como dissemos, observações das funções de correlação de dois pontos das anisotropias de temperatura da RCF possibilitam um teste crucial para a curvatura espacial do universo. Mesmo antes dos novos dados do WMAP, observações feitas pelo experimento de

balão BOOMERANG sugerem que o universo é de fato espacialmente plano ($\Omega_K = 0$) com 10% de acurácia[83],

$$\Omega_0 = \Omega_M + \Omega_\Lambda = 1.0 \pm 0.1 \quad (95\% \text{ c.l.}). \quad (2.66)$$

Em breve, com o lançamento em 2008 do satélite Planck[84] seremos capazes de determinar Ω_0 com 1% de precisão.

Capítulo 3

A FORMAÇÃO DE ESTRUTURAS EM GRANDE ESCALA

3.1 Uma Breve Introdução à Formação de Estruturas em Grande Escala

Neste capítulo vamos apresentar uma introdução ao tema da formação das grandes estruturas do universo (galáxias, aglomerados e superaglomerados de galáxias). Vamos rever em maiores detalhes conceitos sobre a matéria bariônica e a matéria escura, o contraste de densidade e sua evolução. Introduziremos também ferramentas matemáticas úteis no estudo das grandes estruturas, como a função de transferência e o espectro de potências das perturbações de densidade, incluindo-as ainda no contexto da teoria linear da evolução das estruturas. Todas essas ferramentas e definições serão consideradas como base para o desenvolvimento central de nossos estudos, que levarão aos resultados principais desta tese (apresentados em detalhe no Capítulo 5).

3.1.1 Aglomerados e Superaglomerados de Galáxias

Estrelas têm massa no intervalo aproximado de 1 a $10M_{\odot}$. Elas são encontradas nas galáxias, e estas últimas podem ser vistas como os blocos básicos de formação do universo, com massas entre 10^6M_{\odot} (galáxias anãs) a $10^{12}M_{\odot}$ (grandes galáxias, como a nossa). Uma galáxia tipicamente tem um centro luminoso contendo aproximadamente todas as estrelas,

e um halo escuro de composição indefinida que se estende 10 vezes mais longe, e contem da ordem de 10 vezes mais massa.

Grandes galáxias como a nossa têm um tamanho de aproximadamente 0,1 Mpc (incluindo o halo escuro) e estão afastadas entre si da ordem de 1 Mpc. Muitas galáxias pertencem a aglomerados gravitacionalmente ligados contendo de duas a ~ 1000 galáxias. Aglomerados da ordem de 10 Mpc em tamanho são os maiores objetos gravitacionalmente ligados no universo. Existem, aparentemente, ‘superaglomerados’ com tamanho da ordem de 100 Mpc. Presumivelmente eles irão se tornar gravitacionalmente ligados em algum tempo no futuro. Em escalas de 100 Mpc também parecem existir estruturas filamentosas e em forma de membrana, assim como grandes vazios contendo praticamente nenhuma galáxia.

Em escalas maiores do que 100 Mpc a distribuição de matéria no universo é muito homogênea, o que pode ser provado pelas observações diretas das galáxias e pela isotropia do fundo de microondas cósmico. Se alguém atira randomicamente uma esfera no espaço do universo, com raio R , e mede sua massa M , então sua variação quadrática média $\Delta M/M$ será uma função decrescente de R , que é da ordem de 1 para $R = 10$ Mpc, e da ordem de 0,1 para $R = 100$ Mpc; isso mostra que o universo está mais aglomerado em pequenas escalas (e portanto apresentando as inomogeneidades comuns às observações astronômicas locais), mas nas grandes escalas o universo ainda não possui grande contraste de densidade, o que corrobora as observações e a teoria de um universo homogêneo a grandes escalas.

A maior distância que podemos observar é aproximadamente da ordem de 10^4 Mpc, que é a distância que a luz percorreu desde o *Big Bang*. A esfera em torno deste raio é então o universo observável. Do fato da anisotropia do fundo de microondas $\Delta T/T$ ser da ordem de 10^{-5} , deduzimos que $\Delta M/M \lesssim 10^{-5}$ em escalas R comparáveis com o tamanho do universo observável.

Das observações do universo distante, a descoberta mais importante é que o universo está definitivamente evoluindo. O caso mais dramático é o dos quasares (núcleos galácticos ativos), cuja abundância por volume comóvel tem seu pico por volta de $z \sim 3$. Nem quasares nem nenhum outro objeto são observados em $z \gtrsim 5$. galáxias ordinárias assim como aglomerados são observados em *redshifts* da ordem de 1 a 2, e eles também

apresentam sinais de evolução. Idealmente, observações em altos *redshifts*, mais um conhecimento aprimorado da evolução das galáxias, iriam nos dar informações sobre o valor de Ω_0 .

3.1.2 Matéria Bariônica

A matéria ordinária (*i.e.* os núcleos e elétrons), no contexto da cosmologia, é usualmente denominada *matéria bariônica*, uma vez que os bárions (núcleos) são imensamente mais numerosos que os elétrons. Dos cálculos da nucleossíntese sabemos que a contribuição dos bárions para Ω_0 é dada pela Eq. (2.26). Então se $\Omega_0 = 1$ existe certamente uma *matéria escura não-bariônica*, cuja natureza discutiremos depois.

A matéria luminosa no universo, consistindo de estrelas e gases emissores de radiação, contribui com apenas $\Omega_B \sim 0,01$. Então existe uma grande quantidade de *matéria escura bariônica* (que constitui uma pequena percentagem da quantidade total de matéria escura, como vimos antes).

Em uma galáxia esperamos que os bárions sejam concentrados mais na parte luminosa central do que no halo escuro. A razão para isso é que os bárions (a matéria ordinária e luminosa do universo) podem emitir radiação, enquanto que uma matéria escura não-bariônica interagiria muito fracamente para fazer isso (ou ela não seria escura). Em conseqüência, bárions perderiam mais energia, o que poderia fazer com que eles se assentassem mais profundamente no centro galáctico.

3.1.3 Matéria Escura Não-Bariônica

Podemos tentar estimar a quantidade total de matéria através de seu efeito gravitacional. O campo gravitacional em um sistema ligado como em uma galáxia ou aglomerado de galáxias pode ser deduzido das velocidades de seus componentes, pelo efeito Doppler. Descobrimos assim que cada galáxia está cercada por um halo escuro contendo a maior parte de sua massa.

Em escalas maiores, onde o universo é quase homogêneo e isotrópico, podemos observar um pequeno afastamento da expansão uniforme. Esse afastamento define um campo de ‘velocidades peculiares’, que é usualmente chamado de *bulk flow*. Se conhecermos o *bulk*

flow \mathbf{v} e a perturbação de densidade $\delta\rho/\rho$, poderemos deduzir Ω_0 através da relação[38]

$$\frac{\nabla \cdot \mathbf{v}}{3H_0} = -\frac{1}{3}(\Omega_0) \cdot \frac{\delta\rho}{\rho} \quad (3.1)$$

Um estudo recente usando este método[85] indicou que $\Omega_0 > 0,1$. Da nucleossíntese, a matéria bariônica contribui com $\Omega_0 \simeq 0,01$ a $0,09$. O valor total de Ω_0 através das observações da RCF é de $\Omega_0 = 1$. Isso significa que aparentemente precisaríamos ter *matéria escura não-bariônica* no universo, de modo a satisfazer as observações da RCF.

3.1.4 Matéria Escura Fria, Morna e Quente

Uma espécie de neutrino massivo poderia ser uma candidata a matéria escura. Uma forte evidência de que algumas espécies de neutrino possuem massa vem do problema do neutrino solar. Uma matéria escura formada por neutrinos seria chamada “quente”, porque ela permanece relativística até a época em que a maioria das escalas cosmológicas de interesse entram no horizonte (entram em interação causal), e assim ela não pode inicialmente provocar colapso gravitacional.

Matéria escura “fria” (*Cold Dark Matter* - CDM) é por definição não-relativística quando todas as escalas cosmológicas de interesse entram no horizonte. Já a matéria escura “morna”, por definição, permanece relativística até uma época de interesse cosmológico, que contudo é muitíssimo anterior à época para a matéria escura fria.

Os candidatos a matéria escura são conhecidos coletivamente como partículas massivas fracamente interagentes, ou WIMPs (*Weakly Interacting Massive Particles*).

3.1.5 Formação de Estruturas em Grande Escala

Embora a RCF indique que o universo *no passado* era extraordinariamente homogêneo, sabemos que o universo *hoje* não é exatamente homogêneo: observamos galáxias, aglomerados e superaglomerados em grandes escalas. Tais estruturas se ergueriam de inhomogeneidades primordiais muito pequenas que cresceriam no tempo via instabilidade gravitacional, e que podem ter se originado de pequenas ondulações na métrica, à medida que a matéria caía em seus vales. Estas ondulações deveriam ter deixado algum traço como anisotropias na temperatura da RCF; de fato tais anisotropias foram finalmente descobertas pelo satélite COBE em 1992, e elas aparecem como perturbações na temperatura de

apenas uma parte em 10^5 .

Se definirmos o contraste de densidade como[39]

$$\delta(\vec{x}, a) \equiv \frac{\rho(\vec{x}, a) - \bar{\rho}(a)}{\bar{\rho}(a)} = \int d^3\vec{k} \delta_k(a) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad (3.2)$$

onde $\bar{\rho}(a) = \rho_0 a^{-3}$ é a densidade cósmica média, precisamos de uma teoria que explique o crescimento de um contraste de densidade de amplitude $\delta \sim 10^{-5}$ na última superfície de espalhamento ($z = 1100$) até contrastes de densidade da ordem de $\delta \sim 10^2$ para galáxias em *redshifts* $z \ll 1$, i.e. hoje. Esse é um requerimento necessário para qualquer teoria consistente de formação de estruturas[86].

As anisotropias observadas pelo WMAP correspondem aproximadamente a um espectro de potências (de inomogeneidades) primordial invariante de escala de baixa amplitude

$$P(k) = \langle |\delta_k|^2 \rangle \propto k^n, \quad \text{com } n \sim 1, \quad (3.3)$$

onde os brackets $\langle \cdot \rangle$ representam integração sobre um conjunto de diferentes realizações de universo. Estas inomogeneidades são como ondas na métrica espaço-temporal. Quando a matéria cai nos vales dessas ondas, ela cria perturbações de densidade que colapsam gravitacionalmente para formarem galáxias e aglomerados de galáxias, com um espectro que é também invariante de escala. Tal tipo de espectro foi proposto no início dos anos 70 por Edward R. Harrison, e independentemente pelo cosmólogo russo Yakov B. Zel'dovich[87], para explicar a distribuição de galáxias e aglomerados de galáxias em escalas muito grandes, em nosso universo observável.

A maioria das galáxias se formam em *redshifts* da ordem de 2 – 6; aglomerados de galáxias se formam em *redshifts* da ordem de 1, e superaglomerados estão se formando apenas agora. Ou seja, as estruturas cósmicas se formam de baixo para cima (cenário *bottom up*), e não de cima para baixo (cenário *top down*, onde grandes estruturas se fragmentariam em menores): a matéria se aglutina de galáxias para aglomerados, e desses para superaglomerados. Isso dá uma indicação do tipo de matéria que origina as estruturas. O espectro de potência observado da distribuição de matéria nas galáxias, de uma seleção de catálogos de altos *redshifts*, pode ser visto na Fig. 3.1.

Vimos que deve existir uma matéria extra, além da matéria bariônica, e que deve ser escura (pois não a vemos), para explicar o efeito gravitacional visto nas estruturas. Se essa matéria escura é relativística (“quente”) ou não-relativística (“fria”), poderemos

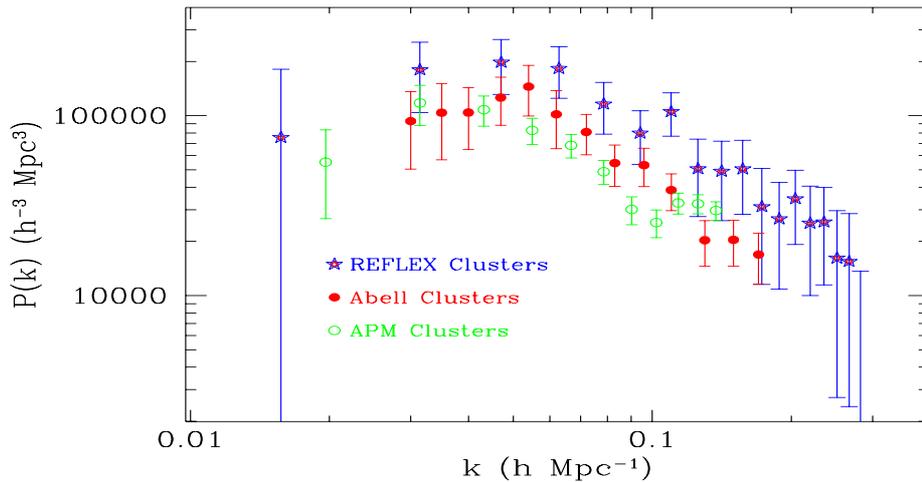


Figura 3.1: O espectro de potências da matéria para aglomerados de galáxias, obtido por três diferentes catálogos de aglomerados.

inferir das observações: partículas relativísticas tendem a se difundir de uma concentração de matéria em outra, transferindo assim energia entre elas e impedindo o crescimento de estruturas em pequenas escalas. Esse comportamento é excluído pelas observações, e logo concluímos que a maior parte da matéria responsável pela formação das estruturas deve ser fria (CDM).

Atualmente, a teoria padrão de formação de estruturas é baseada no modelo CDM com constante cosmológica em um universo plano. O colapso gravitacional amplifica o contraste de densidade inicialmente através do crescimento linear e posteriormente via colapso não-linear. No processo, regiões densas se desacoplam da expansão de Hubble para se tornarem sistemas ligados, que começam a se atrair mutuamente para formarem estruturas ligadas maiores. De fato, as maiores estruturas, os superaglomerados, ainda não se tornaram não-lineares.

O espectro primordial (Eq. (3.3)) é reprocessado pela instabilidade gravitacional, após o universo ter se tornado dominado pela matéria e as inhomogeneidades terem começado a crescer. A teoria linear de perturbações mostra que o modo de crescimento¹ dos pequenos

¹Os modos de decaimento evoluem obedecendo $\delta(t) \sim t^{-1}$, para todos os valores de ω .

contrastes de densidade é da forma[39, 86]

$$\delta(a) \propto a^{1+3\omega} = \begin{cases} a^2, & a < a_{\text{eq}} \\ a, & a > a_{\text{eq}} \end{cases} \quad (3.4)$$

no limite Einstein-de Sitter ($\omega = p/\rho = 1/3$ e 0, para radiação e matéria, respectivamente), e onde, a partir de agora, o sub-índice “eq” refere-se à época do equilíbrio matéria-radiação.

Uma vez que o contraste de densidade na última superfície de espalhamento é da ordem de $\delta \sim 10^{-5}$, e o fator de escala cresce desde então apenas de um fator $z_{\text{dec}} \sim 10^3$, esperaríamos um contraste de densidade hoje da ordem de $\delta_0 \sim 10^{-2}$; no lugar disso, observamos estruturas como as galáxias, onde $\delta \sim 10^2$. Como isso pode ser possível? A RCF mostra anisotropias devidas apenas às flutuações da componente de matéria bariônica (a componente onde os fótons se acoplam, eletromagneticamente). Se existe uma componente adicional de matéria que se acopla somente através de interações muito fracas, as flutuações desta componente poderiam crescer tão logo ela se desacople do plasma primordial, bem antes dos fótons se desacoplarem dos bárions. As inhomogeneidades bariônicas não podem crescer devido à pressão dos fótons: à medida que os bárions colapsam em direção às regiões mais densas, a pressão da radiação eventualmente impede a contração e inicia oscilações acústicas no plasma que previnem o crescimento das perturbações, até a época do desacoplamento dos fótons. Por outro lado, uma componente de matéria escura fria e fracamente interagente poderia iniciar o colapso gravitacional muito mais cedo, mesmo antes da igualdade matéria-radiação, e assim alcançar as amplitudes do contraste de densidade observadas hoje. A resolução desse enigma é um dos mais fortes argumentos para a existência de uma componente de matéria escura fria e fracamente interagente no universo.

A quantidade de matéria escura no universo pode ser deduzida do espectro de potência (a transformada de Fourier da função de correlação de dois pontos das perturbações de densidade) das estruturas observadas em grande escala. Podemos decompor o contraste de densidade em componentes de Fourier, como na Eq. (3.2). Isso é muito conveniente, uma vez que na teoria linear de perturbações os componentes de Fourier individuais evoluem

independentemente. O espectro de potências processado $P(k)$ terá a forma[39, 86]:

$$P(k) \propto \begin{cases} k, & k \ll k_{\text{eq}} \\ k^{-3}, & k \gg k_{\text{eq}} \end{cases} \quad (3.5)$$

Essa é precisamente a forma que os catálogos de galáxias em grande escala irão testar em um futuro próximo (veja a Fig. 3.2).

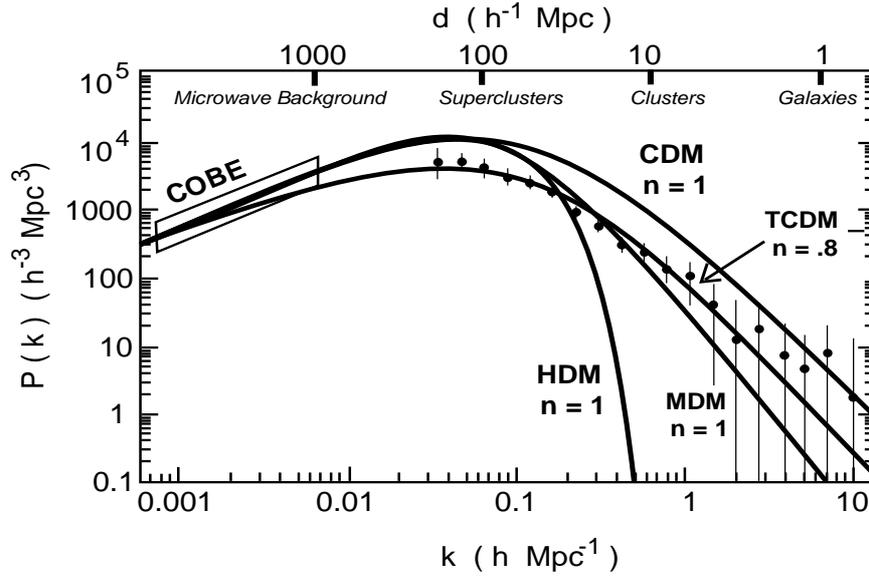


Figura 3.2: O espectro de potências para a matéria escura fria (Cold Dark Matter - CDM), CDM com tilt (TCDM), matéria escura quente (Hot Dark Matter - HDM), e matéria escura composta, ou seja, a quente mais a fria (Mixed Dark Matter - MDM), normalizadas com o satélite COBE, para a formação de estruturas em grande escala[88].

Uma vez que a matéria escura quente (*Hot Dark Matter* - HDM) transfere energia entre aglomerados de matéria, ela irá “varrer” as perturbações de pequena escala, e isso deve ser visto como uma assinatura distintiva no espectro de potências da matéria dos futuros catálogos de galáxias. Por outro lado, a matéria escura fria não-relativística (*Cold Dark Matter* - CDM) permite que as estruturas se formem em todas as escalas via colapso gravitacional. A matéria escura irá então puxar para dentro dela os bárions, que irão posteriormente brilhar e nos permitir observar as galáxias que vemos hoje.

Naturalmente, quando os bárions começam a colapsar dentro dos poços de potencial da matéria escura, eles convertem uma grande parte de sua energia potencial em energia

cinética de prótons e elétrons, ionizando o meio. Como consequência, esperamos ver uma grande parte desses bárions constituindo um gás quente ionizado circundando grandes aglomerados de galáxias. Isso é de fato o que é observado, e confirma o quadro geral de formação de estruturas.

3.2 O Paradigma Inflacionário

3.2.1 Inflação Cosmológica

Nos anos 80 um novo paradigma cosmológico foi estabelecido por Alan Guth, Linde e outros[38]. De acordo com o paradigma inflacionário, o universo primitivo passou por um período de expansão exponencial, gerada por uma densidade de energia aproximadamente constante de um campo escalar chamado *inflaton*, que age como uma força repulsiva que faz com que quaisquer dois pontos no espaço se separem a velocidades exponencialmente maiores do que a expansão do tipo FRW (essa propriedade não viola as leis da causalidade porque não há informação carregada junto com a expansão, ou seja, é apenas o alongamento do espaço-tempo).

Sem inflação um dado caminho de universo ou colapsaria ($\Omega \rightarrow \infty$) ou se tornaria praticamente vazio ($\Omega \rightarrow 0$) em um tempo de Hubble, a menos que seu parâmetro de densidade seja precisamente ajustado para o valor $\Omega = 1$. Em contraste, a inflação naturalmente dirige o valor de Ω para 1, a partir de um valor inicial arbitrário.

Essa expansão superluminal é capaz de explicar a homogeneidade em grande escala de nosso universo observável e, em particular, por que o fundo de microondas parece tão isotrópico: regiões separadas hoje por mais de 1° no céu estiveram, de fato, em contato causal antes da inflação, mas foram esticadas até distâncias cosmológicas pela expansão. Qualquer inhomogeneidade presente antes dessa tremenda expansão iria ser completamente “varrida”. Isso explica por que fótons de regiões supostamente causalmente desconectadas têm na verdade a mesma distribuição espectral com uma única temperatura.

A inflação é uma hipótese elegante, que explica como uma região muito maior do que o nosso universo observável poderia ter se tornado homogênea e plana, sem o recurso de condições iniciais adicionais. Além disso, a inflação dilui naturalmente qualquer espécie indesejável de relíquia remanescente das transições de fase do universo primordial, como

monopolos, cordas cósmicas, etc., que são previstas nas teorias da grande unificação, e cujas densidades de energia poderiam ser tão grandes que o universo teria se tornado instável, e colapsado, há muito tempo atrás.

3.2.2 A Origem das Perturbações de Densidade

Se a inflação cosmológica fez o universo tão extremamente plano e homogêneo, de onde então vieram as galáxias e aglomerados de galáxias? A resposta é que as flutuações quânticas do campo inflaton, em uma dada escala comóvel, geraram uma inhomogeneidade e anisotropia bem definida, que poderia ser vista como clássica uma vez que a escala saísse do horizonte, e poderia daí explicar a inhomogeneidade e anisotropia do universo observável[89].

As flutuações quânticas do campo inflaton são alongadas pela expansão exponencial e geram perturbações de grande escala na métrica. No caso da inflação, as flutuações do campo inflaton induzem ondas na métrica espaço-temporal, que podem ser decompostas em diferentes comprimentos de onda, todos com aproximadamente a mesma amplitude, correspondentes a um **espectro invariante em escala**.

Quando a matéria cai nos vales dessas ondas, ela cria perturbações de densidade que colapsam gravitacionalmente para formarem galáxias, aglomerados e superaglomerados de galáxias, com um espectro que é também invariante em escala. Tal tipo de espectro foi proposto no início dos anos 70 (antes da proposta da inflação) por Harrison e Zel'dovich[87], para explicar a distribuição de galáxias e aglomerados de galáxias em muito grandes escalas em nosso universo observável. Poderíamos também esperar ver essas ondulações na métrica como anisotropias na temperatura do fundo de microondas cósmico.

3.2.3 Oscilações Acústicas no Plasma

A física das anisotropias da RCF é relativamente simples. O universo antes da recombinação era um fluido fortemente acoplado, devido ao espalhamento Thomson. Os fótons espalhavam partículas carregadas (prótons e elétrons), e carregavam energia, de modo que eles sentiam o potencial gravitacional associado com as perturbações impressas na métrica durante a inflação. Uma densidade de bárions (prótons e nêutrons) não colapsa sob efeito da gravidade até que ela entre no horizonte. A perturbação continua a

crescer até que a pressão da radiação se oponha à gravidade e inicie oscilações acústicas no plasma, muito similares às ondas sonoras. Uma vez que os fótons espalham esses bárions, as oscilações acústicas também ocorrem no campo de fótons e induzem um padrão de picos nas anisotropias de temperatura do céu, em diferentes escalas angulares.

Perturbações na métrica de diferentes comprimentos de onda entram no horizonte em tempos diferentes. Os maiores comprimentos de onda, de tamanho comparável ao nosso presente horizonte, estão entrando agora. Existem perturbações com comprimentos de onda comparáveis ao tamanho do horizonte na época da última superfície de espalhamento, de tamanho projetado em torno de 1° no céu hoje, que entraram precisamente na época do desacoplamento. E existem perturbações com comprimentos de onda muito menores do que o tamanho do horizonte na última superfície de espalhamento, que entraram muito anteriormente ao desacoplamento, indo até a época da igualdade matéria-radiação, que passaram por várias oscilações acústicas antes mesmo da época da última superfície de espalhamento. Todas essas perturbações de diferentes comprimentos de onda deixaram suas impressões nas anisotropias da RCF.

Uma vez que os fótons espalham os bárions, eles também sentem a onda acústica e criam um pico na função de correlação. O tamanho do pico é proporcional à quantidade de bárions: quanto maior for o conteúdo de bárions no universo, maior será o pico. A posição do pico no espectro de potências depende do tamanho geométrico do horizonte de partículas na época da última superfície de espalhamento (ou seja, se o universo é plano, aberto ou fechado).

Uma vez que a amplitude e a posição dos picos primário e secundário são diretamente determinadas pela velocidade do som (logo pela equação de estado) e pela geometria e expansão do universo, elas podem ser usadas como um poderoso teste da densidade dos bárions e da matéria escura, além de outros parâmetros cosmológicos.

A grande quantidade de informação codificada nas anisotropias do fundo de microondas é a razão da NASA e da Agência Espacial Européia terem decidido lançar dois satélites independentes para medir a temperatura da RCF e a polarização das anisotropias com uma acurácia jamais vista antes. Eles são, respectivamente, a Sonda das Anisotropias do fundo de Microondas (*Microwave Anisotropy Probe* - WMAP), há muito tempo em operação e que recentemente liberou os resultados de três anos de observações[4, 5], e o

satélite Planck[84] (com lançamento previsto para 2008).

3.3 A Evolução das Perturbações de Densidade

A teoria cosmológica das perturbações, mesmo na sua aproximação linear, descreve um universo mais realístico, inhomogêneo e anisotrópico. Usando suas equações lineares, podemos seguir o crescimento das perturbações em uma dada escala, até elas se tornarem grandes o bastante para o colapso gravitacional. Em escalas iguais ou maiores que $100 Mpc$, onde o colapso está ainda por ocorrer, a teoria cosmológica das perturbações pode ser usada diretamente até a época presente. Em escalas menores, a única forma segura de realizar cálculos além da capacidade da teoria linear é através de simulações numéricas, embora aproximações analíticas possam oferecer *insights* bastante úteis.

Há muito tempo, para o regime Newtoniano, a teoria cosmológica das perturbações é reconhecida como uma aplicação direta das equações de escoamento de fluidos. No regime relativístico, as perturbações cosmológicas foram discutidas primeiramente por Lifshitz em 1946. Seu formalismo considera a métrica de Robertson-Walker perturbada. Um formalismo alternativo, que não faz menção da perturbação na métrica e trabalha em vez disso em cima das equações relativísticas de escoamento de fluidos, foi iniciado por Hawking[90] em 1966. Esse formalismo, que trata os regimes Newtoniano e relativístico de uma maneira unificada, está se tornando cada vez mais popular[91, 92, 93] e será doravante o formalismo usado, nessa descrição matemática da evolução das perturbações de densidade.

3.3.1 Escoamento de Fluidos Relativísticos

Na métrica de FRW, os observadores comóveis medem as quantidades físicas em sua própria região. Por definição, a densidade do momento é zero em relação a um observador comóvel.

Um conceito crucial é o do *gradiente de velocidade* u_{ij} :

$$u_{ij} \equiv \partial_j u_i. \quad (3.6)$$

No limite da homogeneidade e isotropia,

$$u_{ij} = H\delta_{ij}; \quad (3.7)$$

Apenas para o caso de um universo homogêneo e isotrópico, é útil considerarmos ‘hipersuperfícies comóveis’, definidas como aquelas ortogonais às linhas de universo do escoamento do fluido. Em uma dada hipersuperfície, cada quantidade ρ , p e H pode ser dividida em uma média mais uma perturbação,

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \bar{\rho}(t) + \delta\rho(\mathbf{x}, t) \quad (3.8)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = \bar{p}(t) + \delta p(\mathbf{x}, t) \quad (3.9)$$

$$H(\mathbf{x}, t) = \bar{H}(t) + \delta H(\mathbf{x}, t), \quad (3.10)$$

onde t é a coordenada temporal, e $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3)$ são coordenadas espaciais. Nós preferimos escolher as coordenadas espaciais como coordenadas comóveis, relacionadas às coordenadas Cartesianas por $r^i = ax^i$, sendo a o fator de escala médio e $\bar{H} = \dot{a}/a$. Estamos também considerando que todas as perturbações são geradas e evoluem em um espaço plano.

Escalas Independentes

Cada perturbação f pode ser escrita como uma série de Fourier, definida em uma caixa comóvel muito maior do que o universo observável

$$f(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (3.11)$$

A beleza dessa expansão é que cada modo de Fourier se propaga independentemente. O inverso do número de onda a/k define uma escala, que é especificada como tendo seu valor presente em k^{-1} .

Considere agora um pequeno aumento de densidade no universo primordial, que está destinada a ser, digamos, uma galáxia. Se o seu tamanho é da ordem de $r = ax$, ela é tipicamente feita de componentes de Fourier com $k \sim x^{-1}$. Enquanto ela tiver um contraste de densidade pequeno, $\delta\rho/\rho \ll 1$, ela expandirá com o universo, de modo que seu *tamanho comóvel* x permanece constante. Quando seu contraste de densidade fica da ordem de 1 ela irá colapsar, e então o seu *tamanho físico* irá permanecer mais ou

menos constante. Em ambos os casos, a massa da densidade permanece fixa. É então útil associar a cada escala k a massa da matéria contida dentro de uma esfera de raio comóvel $x = k^{-1}$ (tomando o universo como sendo praticamente homogêneo, correspondendo ao universo primordial). Essa massa é definida como[86]

$$M(x) = 1.16 \times 10^{12} h^2 (x/1 \text{ Mpc})^3 M_{\odot}. \quad (3.12)$$

A Entrada no Horizonte

A razão entre uma dada escala comóvel a/k e a distância de Hubble H^{-1} é igual a $aH/k = \dot{a}/k$, que decresce com o tempo. Da época em que essa razão cai até o valor de 1 em diante, dizemos então que tal escala *entrou no horizonte*.

Logo depois da entrada no horizonte, a escala é pequena comparada com a distância de Hubble, o que significa que efeitos físicos ordinários como difusão, propagação livre e a propagação de ondas sonoras podem operar, com a expansão do universo representando apenas um pequeno papel. Bem antes da entrada no horizonte, a escala é muito maior do que a distância de Hubble, o que significa que processos causais dos tipos citados não podem operar. Assim, como vemos, bem antes da entrada no horizonte, cada parte do universo se desenvolve independentemente.

A escala entrando no horizonte em uma dada época é dada por

$$k^{-1} = (aH)^{-1} = \frac{a_0 H_0}{aH} H_0^{-1}. \quad (3.13)$$

Exceto para a época da igualdade matéria-radiação, em $z \sim 10^4$, teremos

$$aH \propto a^{-1}, \quad \text{era da radiação} \quad (3.14)$$

$$aH \propto a^{-1/2}. \quad \text{era da matéria} \quad (3.15)$$

Portanto, uma estimativa grosseira é que a escala entrando no horizonte em $z \lesssim 10^4$ é $k^{-1} \sim z^{-1/2} H_0^{-1}$, fazendo a escala entrando no horizonte na época da igualdade matéria-radiação ser igual a $k_{\text{eq}}^{-1} \sim 10^{-2} H_0^{-1}$, e que a escala entrando no horizonte em $z \gtrsim 10^4$ seja $k^{-1}(z) \sim 10^2 z^{-1} H_0^{-1}$. Um cálculo mais preciso mostra que $k_{\text{eq}}^{-1} = 40h^{-1} \text{ Mpc}$, e que a escala entrando no horizonte na época do desacoplamento dos fótons é $k_{\text{dec}}^{-1} = 90h^{-1} \text{ Mpc}$. A primeira escala é crucial para a formação das estruturas, e a segunda para as anisotropias da RCF.

A Equação Diferencial

Derivaremos agora as equações diferenciais das perturbações. Para fazermos isso, precisamos lembrar que as linhas de universo comóvel não são, em geral, geodésicas, por causa do gradiente de pressão. Como resultado, o intervalo de tempo próprio $d\tau$, entre um par de hipersuperfícies comóveis, é dependente da posição. Sua média pode ser identificada como a coordenada do intervalo de tempo dt , e podemos mostrar (usando essencialmente a transformação de Lorentz entre observadores próximos) que sua variação com a posição é dada por[92, 89]

$$\frac{d\tau}{dt} = \left(1 - \frac{\delta p}{\rho + p}\right) \quad (3.16)$$

Ao longo de cada linha de universo, a taxa de mudança de ρ em relação ao tempo próprio τ é dada pela conservação de energia e tem a mesma forma que no caso não-perturbado,

$$\frac{d\rho}{d\tau} = -3H(\rho + p) \quad (3.17)$$

A taxa de mudança de H é dada pela equação de campo de Einstein, e em primeira ordem recebe apenas um termo extra na presença das perturbações, vindo do gradiente de pressão[92],

$$\frac{dH}{d\tau} = -H^2 - \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) - \frac{1}{3} \frac{\nabla^2 \delta p}{\rho + p} \quad (3.18)$$

Esta equação é chamada de equação *Raychaudhuri*. O operador ∇^2 é o Laplaciano em uma hipersuperfície comóvel, dado em termos de coordenadas comóveis como

$$\nabla^2 = a^{-2} \delta^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (3.19)$$

Perturbando H , ρ e p em primeira ordem e usando a Eq. (3.16), temos as seguintes equações para os componentes de Fourier

$$(\delta\rho_{\mathbf{k}})' = -3(\rho + p)\delta H_{\mathbf{k}} - 3H\delta\rho_{\mathbf{k}} \quad (3.20)$$

$$(\delta H_{\mathbf{k}})' = -2H\delta H_{\mathbf{k}} - \frac{4\pi G}{3}\delta\rho_{\mathbf{k}} + \frac{1}{3} \left(\frac{k}{a}\right)^2 \frac{\delta p_{\mathbf{k}}}{\rho + p} \quad (3.21)$$

Eliminando $\delta H_{\mathbf{k}}$ com a Eq. (3.20) temos uma equação diferencial de segunda ordem para $\rho_{\mathbf{k}}$. É conveniente usar o *contraste de densidade* $\delta \equiv \frac{\delta\rho}{\rho}$, e a notação $w = p/\rho$ e $c_s^2 = \dot{p}/\dot{\rho}$, em termos dos quais a equação fica[89]:

$$H^{-2}\ddot{\delta}_{\mathbf{k}} + [2 - 3(2w - c_s^2)]H^{-1}\dot{\delta}_{\mathbf{k}} - \frac{3}{2}(1 - 6c_s^2 + 8w - 3w^2)\delta_{\mathbf{k}} = - \left(\frac{k}{aH}\right)^2 \frac{\delta p_{\mathbf{k}}}{\rho} \quad (3.22)$$

Note que $c_s^2 = \dot{p}/\dot{\rho}$ é a velocidade do som, porque p e ρ variam adiabaticamente em um universo homogêneo e isotrópico (ausência de fluxo de calor e outros processos dissipativos).

Evolução dos Bárions: A Massa de Jeans

Ao contrário do contraste de densidade do modelo CDM, o contraste de densidade dos bárions é pequeno na época do desacoplamento dos fótons por causa justamente do acoplamento bárion-fóton, que mantém o contraste aproximadamente constante desde a entrada no horizonte. Após o desacoplamento, os bárions não são mais afetados pelos fótons, mas duas forças antagônicas agem sobre eles. Primeiro existe a gravidade, que tende a fazer os bárions caírem nos poços de potenciais criados pelo contraste de densidade da matéria escura (CDM), e segundo existe o próprio gradiente de pressão dos bárions, que tende a mantê-los fora desses mesmos poços.

Para ver rigorosamente qual efeito ganha, devemos generalizar a Eq. (3.22) para tratar a matéria escura (CDM) e os bárions como um par de fluidos desacoplados[92, 93]. Na prática uma estimativa em ordem de magnitude é o bastante. Ignorando a pressão, o tempo levado pelos bárions para caírem em um poço de potencial² é da ordem de $(G\rho)^{-1/2}$. O tempo para a pressão se ajustar e prevenir o colapso é da ordem de λ/c_s , onde $\lambda = 2\pi/k$ é o comprimento de onda e c_s é a velocidade do som. O colapso ocorre se $\lambda/c_s \lesssim (G\rho)^{-1/2}$, porque a pressão não consegue agir rápido o bastante. Portanto, o colapso ocorre em escalas acima de $k_J = (4\pi^2 G\rho/c_s^2)^{1/2}$. Essa é a chamada *Escala de Jeans* e a massa correspondente a tal escala, dada pela Eq. (3.12), é chamada de *Massa de Jeans*[94].

²Se uma partícula cai do repouso em direção a uma massa pontual M , sua velocidade na distância r é dada por $mv^2 = 2GM/r$; assim ela percorre uma distância significante em um tempo $t \sim r/v \sim (GM/r^3)^{-1/2}$. Substituindo a massa pontual por uma perturbação com tamanho r e densidade $\rho \sim M/r^3$ obtemos o resultado acima.

O Caso do Gradiente de Pressão Nulo

O lado direito da Eq. (3.22), que envolve o gradiente de pressão, é desprezível após a época de domínio da matéria, porque a própria pressão é desprezível.³ Ela é também desprezível bem antes da entrada no horizonte mesmo durante a época do domínio da radiação, porque nesta o gradiente também é bastante pequeno.⁴ Quando esse lado direito é desprezível, a Eq. (3.22) pode então ser reduzida a uma equação de primeira ordem, que tem uma interpretação bastante simples[91].

A solução está na introdução de uma quantidade K , definida localmente pela equação de Friedmann. A relatividade geral mostra que K/a^2 é uma medida da curvatura das hipersuperfícies comóveis. Quando o gradiente de pressão é desprezível, K é independente do tempo. Podemos dizer que *quando o gradiente de pressão é desprezível, cada região do espaço se desenvolve como um universo de Friedmann separado*.

Em uma hipersuperfície comóvel, K pode ser dividida em uma média \bar{K} mais uma perturbação δK , mas a média pode ser estabelecida como nula porque $\Omega \simeq 1$. Perturbando a equação de Friedmann, em primeira ordem, teremos

$$2H\delta H_{\mathbf{k}} = \frac{8\pi G}{3}\delta\rho_{\mathbf{k}} - \frac{\delta K_{\mathbf{k}}}{a^2} \quad (3.23)$$

Quando $\delta K_{\mathbf{k}}$ é independente do tempo, as Eqs. (3.20) e (3.23) dão uma equação diferencial de primeira ordem para o contraste de densidade,

$$\frac{2H^{-1}}{5+3w} \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{aH}{k} \right)^2 \delta_{\mathbf{k}} \right] + \left(\frac{aH}{k} \right)^2 \delta_{\mathbf{k}} = \frac{2+2w}{5+3w} R_{\mathbf{k}} \quad (3.24)$$

onde $w = p/\rho$, e onde introduzimos a importante quantidade

$$R_{\mathbf{k}} = \frac{3}{2} \frac{\delta K_{\mathbf{k}}}{k^2} \quad (3.25)$$

Relembrando que $\delta K/a^2$ é a perturbação na curvatura e de que ela tem unidades de (comprimento)⁻², vemos que $R_{\mathbf{k}} = (3/2)(\delta K/a^2)(a^2/k^2)$ essencialmente mede a perturbação na curvatura em unidades da escala a/k . Outra interpretação de R é de que ele é essencialmente o potencial gravitacional Newtoniano causado por $\delta\rho$.

³Exceto para os bárions em escalas abaixo da escala de Jeans, e assumimos que a matéria escura é fria (CDM).

⁴Desde que p/ρ não seja extremamente grande, o que é garantido pela condição inicial adiabática.

Durante qualquer época, quando w é constante a Eq. (3.24) tem a solução (deixando de lado o modo de decaimento)

$$\left(\frac{aH}{k}\right)^2 \delta_{\mathbf{k}} = \frac{2+2w}{5+3w} R_{\mathbf{k}} \quad (3.26)$$

Na era de domínio da radiação antes da entrada no horizonte ela se torna

$$\left(\frac{aH}{k}\right)^2 \delta_{\mathbf{k}} = \frac{4}{9} R_{\mathbf{k}}(\text{initial}) \quad (3.27)$$

e na era de domínio da matéria ela fica na forma abaixo:

$$\left(\frac{aH}{k}\right)^2 \delta_{\mathbf{k}} = \frac{2}{5} R_{\mathbf{k}}(\text{final}) \quad (3.28)$$

Os sub-índices implicam que estamos considerando o valor de $R_{\mathbf{k}}$ durante a primeira era como uma ‘condição inicial’, que determina o seu valor durante a era final de domínio da matéria.

Para referências futuras note que durante a era de domínio da matéria, $H \propto t^{-1} \propto a^{-3/2}$ e

$$\delta_{\mathbf{k}} \propto a \quad (\text{era da matéria}) \quad (3.29)$$

O Papel da Constante Cosmológica na Formação de Estruturas

A introdução de uma constante cosmológica muda a relação entre a densidade de matéria e a taxa de expansão em um universo dominado pela matéria, e isso influencia o crescimento das estruturas em grande escala.

As perturbações começam muito pequenas (da ordem de 10^{-5} na recombinação, pelas anisotropias da RCF), de modo que a teoria linear é efetiva. O destino das flutuações está nas mãos de dois efeitos antagônicos: a tendência da auto-gravidade de fazer as regiões densas colapsarem, e a tendência das partículas de teste da expansão de fundo de se moverem para longe uma das outras. Essencialmente, o efeito da energia do vácuo é de contribuir para a expansão, e assim agir no sentido de suprimir o crescimento das perturbações[38, 39].

Para perturbações no componente de matéria escura fria dentro do horizonte, uma análise Newtoniana é suficiente. Se a densidade de energia da matéria dinâmica é dominada pela matéria escura fria (CDM), a equação da evolução linear Newtoniana será

$$\ddot{\delta}_{\mathbf{M}} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_{\mathbf{M}} = 4\pi G\rho_{\mathbf{M}}\delta_{\mathbf{M}}. \quad (3.30)$$

O segundo termo representa uma força de atrito efetiva devida à expansão do universo, caracterizada por uma escala de tempo $(\dot{a}/a)^{-1} = H^{-1}$, enquanto que o lado direito é um termo de força com escala de tempo característica de $(4\pi G\rho_M)^{-1/2} \approx \Omega_M^{-1/2} H^{-1}$. Assim, quando $\Omega_M \approx 1$, estes efeitos estão contrabalançados e as perturbações CDM crescem gradualmente; quando Ω_M cai apreciavelmente abaixo da unidade (como quando a energia de curvatura ou a do vácuo começam a dominar), o termo de atrito se torna mais importante e o crescimento das perturbações efetivamente termina. De fato, a equação 3.30 pode ser diretamente resolvida[95] para fornecer

$$\delta_M(a) = \frac{5}{2} H_0^2 \Omega_{M0} \frac{\dot{a}}{a} \int_0^a H^{-3}(a') da' , \quad (3.31)$$

Existem aproximações analíticas para essa fórmula[37], assim como expressões analíticas para universos planos[96].

3.3.2 A Função de Transferência

Uma vez que as perturbações evoluem após entrarem no horizonte, o espectro de potências não permanecerá constante. Para escalas entrando no horizonte bem depois do domínio da matéria ($k^{-1} \gg k_{\text{eq}}^{-1} \simeq 81 \text{ Mpc}$), a perturbação na métrica não mudou significativamente, tal que $R_k(\text{final}) = R_k(\text{inicial})$. Assim a Eq. (3.26) determina o contraste de densidade final em termos do inicial. Em escalas menores, existe uma *função de transferência* linear $T(k)$, que pode ser definida como[89]

$$R_k(\text{final}) = T(k) R_k(\text{inicial}) . \quad (3.32)$$

Uma definição equivalente, e mais usual, seria

$$a^{-1} \delta_{\mathbf{k}}(\text{final}) = AT(k) \delta_{\mathbf{k}}(\text{inicial}), \quad (3.33)$$

onde o lado direito, dependente do tempo, é avaliado para um determinado tempo escolhido arbitrariamente durante a era inicial, e a constante A é escolhida tal que T se torne igual a 1 em escalas maiores.

Dado a condição adiabática, a função de transferência é determinada pelos processos físicos que ocorrem entre a entrada no horizonte e o domínio da matéria, incluindo: a propagação livre dos neutrinos por volta da época da entrada no horizonte; a difusão dos

fótons por volta da mesma época; a difusão dos bárions em conjunto com a dos fótons, e o estabelecimento após o domínio da matéria de um contraste de densidade comum da matéria, à medida que os bárions caem dentro dos poços de potencial da matéria escura fria. Todos esses efeitos agem separadamente em primeira ordem nas perturbações, para cada componente de Fourier, de modo que uma função de transferência linear é produzida. Existem muitas parametrizações na literatura, mas a mais largamente empregada é a da Ref.[97],

$$T(k) = \left[1 + \left(ak + (bk)^{3/2} + (ck)^2 \right)^\nu \right]^{-1/\nu}, \quad \nu = 1, 13, \quad (3.34)$$

$$a = 6,4 (\Omega_M h)^{-1} h^{-1} \text{ Mpc}, \quad (3.35)$$

$$b = 3,0 (\Omega_M h)^{-1} h^{-1} \text{ Mpc}, \quad (3.36)$$

$$c = 1,7 (\Omega_M h)^{-1} h^{-1} \text{ Mpc}. \quad (3.37)$$

A função de transferência deixa de ser válida quando o contraste de densidade se torna da ordem de 1. Após isso, o fenômeno altamente não-linear do colapso gravitacional se inicia.

3.3.3 O Espectro das Perturbações de Densidade

Para discutirmos as perturbações em uma dada região do universo em torno de nós, precisamos realizar a expansão de Fourier da Eq. (3.11) em uma caixa muito maior que esta região. Se a caixa é um cubo com lados de comprimento L , o valor possível de \mathbf{k} de modo a formar uma grade cúbica no espaço dos k é de $2\pi/L$.

Quando discutimos um sistema isolado, o que é um caso freqüente na física, podemos tomar o limite $L \rightarrow \infty$ de um modo direto; os coeficientes $f_{\mathbf{k}}$ tenderiam então a um limite constante, que seria uma função suavizada de \mathbf{k} . Mas perturbações cosmológicas não caem a grandes distâncias, e seus coeficientes de Fourier não são funções suavizadas de \mathbf{k} . Eles são o análogo espacial de um sinal se estendendo ao longo de um período de tempo indefinido, ao contrário de um pulso isolado.

Embora os coeficientes $f_{\mathbf{k}}$ não sejam funções suavizadas, é razoável supôr que $|f_{\mathbf{k}}|^2$ varie suavemente quando espalhado sobre uma região d^3k do espaço dos k , que seja grande o suficiente para conter muitos pontos da grade. Denotemos essa média por $\langle |f_{\mathbf{k}}|^2 \rangle$; ela depende apenas de $k = |\mathbf{k}|$, e é chamada de *espectro* de f , por causa da analogia com um

sinal. Uma conveniente escolha do fator seria definir o espectro como

$$P_f \equiv \left(\frac{Lk}{2\pi}\right)^3 4\pi \langle |f_{\mathbf{k}}|^2 \rangle. \quad (3.38)$$

A normalização é escolhida para dar uma fórmula simples para a dispersão (raiz quadrática média) de f , que definiremos a partir de agora como σ_f . Da expansão de Fourier teremos $\sigma_f^2 = \sum |f_{\mathbf{k}}|^2$, e uma vez que os valores possíveis de \mathbf{k} formam uma grade cúbica de espaçamento $2\pi/L$, a transição de soma para integral é definida como

$$\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \sum_{\mathbf{k}} \longrightarrow 4\pi \int k^2 dk. \quad (3.39)$$

A dispersão σ_f é então dada por

$$\sigma_f^2 \equiv \langle f^2(\mathbf{x}) \rangle = \int_0^\infty P_f(k) \frac{dk}{k}, \quad (3.40)$$

com os brackets agora denotando a média sobre a posição \mathbf{x} .

Para a perturbação de densidade $f = \delta$ é sempre útil definir a função de correlação $\xi(r)$ como

$$\xi(r) = \langle f(\mathbf{r} + \mathbf{x}) f(\mathbf{r}) \rangle = \int_0^\infty P_f(k) \frac{\sin(kr)}{kr} \frac{dk}{k}. \quad (3.41)$$

Essa quantidade análoga é útil para outras perturbações, como os componentes das velocidades peculiares, embora ela não seja nesse caso chamada de função de correlação. Para $r = 0$ ela claramente recupera o valor de σ_f^2 .

Se as fases dos coeficientes de Fourier são randômicas, f é dita ser Gaussiana, e então todas as suas propriedades estocásticas são determinadas por seu espectro. Em particular a distribuição de probabilidades de f , avaliada em pontos escolhidos randomicamente, tem um perfil Gaussiano.

Das Eqs. (3.28) e (3.32), o espectro do contraste de densidade após o domínio da matéria pode ser escrito como[86]

$$P_\delta(k) = \left(\frac{k}{aH}\right)^4 T^2(k) \delta_H^2(k), \quad (3.42)$$

onde a quantidade δ_H especifica o espectro inicial. A suposição padrão é que δ_H^2 seja independente de k . Uma possibilidade mais geral seria considerar um espectro

$$\delta_H^2 \propto k^{n-1}, \quad (3.43)$$

onde o expoente n é chamado de índice espectral. A definição do índice como $n-1$ ao invés de n é um acidente histórico: a escolha padrão de $n = 1$ foi primeiro proposta por Harrison (1970) e Zel'dovich (1970)[87] como a única possibilidade para que as perturbações fossem pequenas em todas as escalas, na época da entrada no horizonte.

3.3.4 O Contraste de Densidade Filtrado

Na época atual o universo é altamente inhomogêneo nas pequenas escalas. Para podermos usar a teoria linear das perturbações cosmológicas, devemos tirar, filtrar as pequenas escalas, espalhando cada perturbação sobre uma região de tamanho $\gtrsim 100$ Mpc. Precisamos fazer o mesmo para épocas no passado relativamente recente, exceto que nesses casos a escala comóvel de filtragem decresce. Apenas no universo realmente primordial ele é de fato (presumivelmente) homogêneo em todas as escalas.

A filtragem é feita usando-se uma ‘função janela’ $W(R_f, r)$, que é igual a 1 em $r = 0$ e que cai rapidamente através de um raio R_f [38]. Tomando por definição o contraste de densidade, a quantidade filtrada será

$$\delta(R_f, \mathbf{x}) = \int W(R_f, |\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \delta(\mathbf{x}') d^3x', \quad (3.44)$$

e o seu espectro será

$$P_\delta(R_f, k) = [\tilde{W}(R_f, k)/V_f]^2 P_\delta(k), \quad (3.45)$$

onde

$$\tilde{W}(R_f, k) = \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} W(R_f, r) d^3x, \quad (3.46)$$

e

$$V_f = \int W(R_f, r) d^3x, \quad (3.47)$$

enquanto a dispersão filtrada é dada por

$$\sigma^2(R_f) = \int_0^\infty [\tilde{W}(R_f, k)/V_f]^2 P_\delta(k) \frac{dk}{k}. \quad (3.48)$$

A quantidade V_f é o volume ‘englobado’ pelo filtro. É conveniente definirmos a massa associada como $M = \rho_0 V_f$, onde ρ_0 é a densidade de massa atual. Normalmente usa-se M no lugar de R_f para especificar a escala, escrevendo-se então $\delta(M, \mathbf{x})$ e $\sigma(M)$.

As duas escolhas mais populares são o filtro Gaussiano

$$W(R_f, r) = \exp(-r^2/2R_f^2), \quad (3.49)$$

$$V_f = (2\pi)^{3/2} R_f^3, \quad (3.50)$$

$$\tilde{W}(R_f, k)/V_f = \exp(-k^2 R_f^2/2), \quad (3.51)$$

$$M = 4.36 \times 10^{12} h^2 (R_f/1 \text{ Mpc})^3 M_\odot, \quad (3.52)$$

e o filtro Top Hat que espalha uniformemente sobre uma esfera de raio R_f

$$W(R_f, r) = \theta(r - R_f), \quad (3.53)$$

$$V_f = 4\pi R_f^3/3, \quad (3.54)$$

$$\tilde{W}(R_f, k)/V_f = 3 \left(\frac{\sin(kR_f)}{(kR_f)^3} - \frac{\cos(kR_f)}{(kR_f)^2} \right), \quad (3.55)$$

$$M = 1.16 \times 10^{12} h^2 (R_f/1 \text{ Mpc})^3 M_\odot. \quad (3.56)$$

O filtro Gaussiano é o mais conveniente para cálculos teóricos, mas o filtro Top Hat é largamente empregado no tratamento de dados.

3.3.5 A Teoria Linear Funciona

Uma comparação completa da teoria com as observações requer o uso de simulações numéricas, para seguirmos o processo de colapso gravitacional que ocorre em cada escala, onde a teoria das perturbações cosmológicas perde a validade. Acontece, porém, que o tratamento linear pode ser aplicado em uma grande variedade de escalas, de modo que podemos obter limites nos parâmetros cosmológicos usando tal teoria. Explicaremos agora alguns dos mais importantes sucessos da teoria linear:

- *As anisotropias em grande escala da RCF:* os atuais dados do WMAP exploram escalas da ordem do tamanho observável do universo, de 10^3 a 10^4 Mpc.
- *O bulk flow:* Espalhando as velocidades peculiares das galáxias sobre uma esfera de raio da ordem de dezenas de Mpc para termos o que é chamado de *bulk flow*, devemos estar no regime linear. Em princípio[85] podemos observar a componente radial do bulk flow, construir o correspondente potencial radialmente, reconstruir \mathbf{v} e finalmente determinar a perturbação de densidade $\delta\rho(\mathbf{x})$.

- *A densidade numérica dos aglomerados de galáxias:* A densidade numérica média $n(> M)$ dos aglomerados com massas maiores que $M \sim 10^{15} M_{\odot}$ nos dá informação em uma escala da ordem de $10h^{-1}$ Mpc. Com a teoria linear podemos estimar $n(> M)$ assumindo que a matéria, nas regiões do espaço onde $\delta(M, \mathbf{x})$ excede um dado valor crítico δ_c da ordem de 1, esteja ligada em objetos com massa $> M$. A fração do espaço ocupado por tais regiões é dada pela equação abaixo:

$$f(> M) = \text{erfc} \left(\frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma(M)} \right) \quad (3.57)$$

Dessa suposição Press e Schechter derivaram a fórmula[89]

$$m \frac{dn(> M)}{dM} = \frac{\langle k^2 \rangle}{12\pi^2 R_f} \nu e^{-\nu^2/2} \quad (3.58)$$

onde $\nu = \delta_c/\sigma(M)$ é o número de desvios padrões que δ_c representa, e

$$\langle k^2(M) \rangle = \sigma^{-2}(M) \int_0^{\infty} k^2 e^{-k^2 R_f^2} P_{\delta}(k) \frac{dk}{k} \quad (3.59)$$

(Essa fórmula inclui um fator 2, carente de explicações físicas adequadas, de modo a forçar a normalização da função de massa). Um desenvolvimento alternativo (chamado de *Peak Ansatz*) seria identificar cada pico em $\delta(M, \mathbf{x})$ mais alto do que δ_c com um objeto de massa $> M$, o que daria em um resultado praticamente similar. Ainda outro método, que em princípio é superior aos demais, seria abandonar a teoria linear e desenvolver uma precisa simulação numérica, o que novamente dará, praticamente, *os mesmos resultados dos métodos anteriores* (e isso é realmente a maior conquista realizada pela teoria linear de formação de estruturas, até hoje).

- *A forma da função de correlação das galáxias:* A função de correlação das galáxias da Eq. (3.41) pode ser usada para sondar a forma de $\sigma(M)$ em escalas intermediárias, entre as escalas exploradas pelos últimos dois itens acima, se o fator de *bias* (viés) for considerado independente de escala.
- *A densidade numérica dos Quasares:* Dadas algumas suposições astrofísicas, a abundância observada dos quasares pode fornecer um limite inferior para o contraste de densidades em altos *redshifts*.

Capítulo 4

MECÂNICA ESTATÍSTICA E TEORIA CINÉTICA NÃO EXTENSIVA

4.1 Mecânica Estatística Não Extensiva

4.1.1 Introdução

Como é bem conhecido, a termodinâmica é o ramo da física que descreve as relações entre as variáveis fundamentais para o mundo macroscópico (temperatura, pressão, volume, energia, entropia e outras mais). Boltzmann e Gibbs forneceram uma magnífica conexão da termodinâmica com o mundo microscópico. Esta conexão, normalmente referida como a *mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs (BG)* (ou simplesmente *mecânica estatística*, uma vez que foi a única a ser formulada ao longo de mais de um século) se estabeleceu como a descrição padrão para todos os sistemas da natureza.

A termodinâmica é baseada em dois pilares : energia e entropia. A energia concerne possibilidades (dinâmicas ou mecânicas), e a entropia concerne as probabilidades dessas possibilidades. A energia é mais básica, e claramente depende do sistema físico (clássico, quântico, relativístico, ou qualquer outro), enquanto que a entropia é mais sutil, e reflete a informação sobre os sistemas físicos.

Era uma crença geral o fato da expressão microscópica da entropia física ter que ser

universal, i.e., independente de qualquer sistema (mas dependente de W , o número total de possibilidades dos sistemas). Mais precisamente, para todos os sistemas discretos da natureza, a entropia tem a chamada forma de Boltzmann-Gibbs¹

$$S_{BG} = -k \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i , \quad (4.1)$$

com a condição de normalização

$$\sum_{i=1}^W p_i = 1 , \quad (4.2)$$

onde p_i é a probabilidade do sistema estar no i -ésimo microestado, e k é a constante de Boltzmann ($k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K). Sem perda de generalidade, podemos também arbitrariamente assumir $k = 1$. Se todos os microestados têm a mesma probabilidade $p_i = 1/W$ (assumindo a equiprobabilidade de seus estados) obteremos o famoso *princípio de Boltzmann*

$$S_{BG}(p_i = 1/W, \forall i) = k \ln W . \quad (4.3)$$

Pode ser mostrado facilmente que a entropia (4.1) é positiva, côncava, extensiva e estável[99] (ou em outras palavras, *experimentalmente robusta*). Se A e B são dois sistemas independentes no sentido que $p_{ij}^{A+B} = p_i^A p_j^B$, então segue de (4.1) que

$$S_{BG}(A + B) = S_{BG}(A) + S_{BG}(B) . \quad (4.4)$$

Poderíamos naturalmente esperar que a forma da Eq. (4.1) de S_{BG} iria ser rigorosamente derivada da dinâmica microscópica. Contudo, a dificuldade de realizar tal derivação dos primeiros princípios persiste ainda hoje em dia. Conseqüentemente a Eq. (4.1) é na prática um *postulado*. Mas essa crença generalizada de universalidade não parece ter nenhuma base rigorosa. Na verdade, parece nos dias atuais que o conceito de informação física, e suas expressões microscópicas em termos de probabilidades, devem ser adaptadas para cada sistema tratado.

As expressões das Eqs. (4.1) e (4.3) são tão comumente empregadas porque a maioria dos sistemas cujas propriedades térmicas são estudadas pertencem ao tipo envolvendo forte caos em sua dinâmica microscópica, i.e., expoentes de Lyapunov positivos, conhecidos por propiciar misturas rápidas e eventualmente ergodicidade no espaço de fase. Não

¹A expressão é de Shannon[98].

existe nenhuma razão fundamental que justifique o uso da mesma expressão para sistemas envolvendo um espectro quase nulo de Lyapunov, i.e., para sistemas exibindo baixo caos, quando a sensibilidade às condições iniciais divergem menos que exponencialmente. De fato, tais sistemas, se isolados, poderiam ter sérias dificuldades em satisfazer a hipótese de ergodicidade durante o tempo de observação das quantidades medidas.

A não universalidade das expressões microscópicas para a entropia é quase auto-evidente. Se, contudo, S_{BG} não é universal, como generalizá-lo? A análise da estrutura da teoria de BG fornece-nos uma metáfora para formularmos esta nova mecânica estatística, mas estamos falando de uma *generalização* da teoria de BG, e *não de uma alternativa* a ela.

4.1.2 Equações Centrais da Mecânica Estatística Não Extensiva

A mecânica estatística e a termodinâmica não extensiva foram introduzidas em 1988 por C. Tsallis[11], e posteriormente desenvolvidas em 1991[100] e 1998[101], com o objetivo de estender o domínio de aplicabilidade da mecânica estatística para sistemas onde a estatística de Boltzmann-Gibbs (BG) e a termodinâmica padrão apresentava sérias dificuldades explanatórias. De fato, um crescente número desses sistemas foi apontado na literatura recente para os quais a distribuição de BG parecia ser violada. Alguns desses casos são satisfatoriamente explicados dentro do formalismo que explicaremos adiante (veja a Ref.[102] para revisões gerais e a Ref.[103] para uma bibliografia atualizada que inclui contribuições cruciais e aplicações realizadas ao longo dos anos).

Neste espírito, uma entropia S_q que generaliza S_{BG} foi proposta. A entropia S_q (com $S_1 = S_{BG}$) depende do índice q , um número real a ser determinado *a priori* da dinâmica microscópica. A propriedade escolhida para ser generalizada foi a extensividade, definida na Eq. (4.4).

Uma Metáfora

A equação diferencial ordinária mais simples que alguém poderia elaborar é

$$\frac{dy}{dx} = 0, \tag{4.5}$$

cuja solução (com condição inicial $y(0) = 1$) é $y = 1$. A próxima equação diferencial mais simples seria

$$\frac{dy}{dx} = 1, \quad (4.6)$$

cuja solução, com a mesma condição inicial, é $y = 1 + x$. A próxima equação de complexidade crescente seria da forma

$$\frac{dy}{dx} = y, \quad (4.7)$$

cuja solução é $y = e^x$; e sua função inversa é

$$y = \ln x, \quad (4.8)$$

que tem a mesma forma funcional da entropia de Boltzmann-Gibbs (Eq. (4.3)), e satisfaz a bem conhecida propriedade de aditividade

$$\ln(x_A x_B) = \ln x_A + \ln x_B. \quad (4.9)$$

Uma questão que poderia ser colocada: podemos unificar todos esses três casos (Eqs. (4.5), (4.6) e (4.7)) considerados acima? Uma resposta positiva trivial seria considerar $dy/dx = a + by$, e jogar com os valores de (a, b) . Mas podemos unificar tudo com *apenas um* parâmetro? A resposta ainda seria positiva, mas desta vez *fora da linearidade*, usando

$$\frac{dy}{dx} = y^q \quad (q \in \mathcal{R}), \quad (4.10)$$

que, para $q \rightarrow -\infty$, $q = 0$ e $q = 1$, reproduz respectivamente as equações diferenciais (4.5), (4.6) e (4.7). A solução da equação (4.10) é dada pela função *q-exponencial*

$$y = [1 + (1 - q)x]^{\frac{1}{1-q}} \equiv e_q^x \quad (e_1^x = e^x), \quad (4.11)$$

cujos inverso é a função *q-logaritmo*

$$y = \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q} \equiv \ln_q x \quad (\ln_1 x = \ln x). \quad (4.12)$$

Esta função satisfaz a propriedade de *pseudo-aditividade*

$$\ln_q(x_A x_B) = \ln_q x_A + \ln_q x_B + (1 - q)(\ln_q x_A)(\ln_q x_B). \quad (4.13)$$

A Entropia Não Extensiva S_q

Como vimos, a função exponencial e^x é generalizada na função q -exponencial

$$e_q^x \equiv [1 + (1 - q)x]^{1/(1-q)} \quad (q \in \mathcal{R}). \quad (4.14)$$

Podemos trivialmente verificar que esta função (positiva e monotonicamente crescente) (i) para $q \rightarrow 1$ retorna $e_1^x = e^x$ ($\forall x$), (ii) para $q > 1$, desaparece como uma lei de potências quando $x \rightarrow -\infty$ e diverge em $x = 1/(q-1)$, e (iii) para $q < 1$, tem um ponto de corte em $x = -1/(1-q)$, abaixo do qual ela é definida como sendo identicamente zero. Se $x \rightarrow 0$ nós temos $e_q^x \sim 1 + x$ ($\forall q$).

A função inversa da q -exponencial é o q -logaritmo, definido como segue:

$$\ln_q x \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q} \quad (q \in \mathcal{R}). \quad (4.15)$$

Claro que $\ln_1 x = \ln x$ ($\forall x$). Se $x \rightarrow 1$ teremos $\ln_q x \sim x - 1$ ($\forall q$).

Generalização da Entropia de BG

Podemos reescrever a Eq. (4.1) em uma forma um pouco diferente (com $k = 1$):

$$S_{BG} = - \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i = \sum_{i=1}^W p_i \ln \frac{1}{p_i} = \left\langle \ln \frac{1}{p_i} \right\rangle, \quad (4.16)$$

onde $\langle \dots \rangle \equiv \sum_{i=1}^W (\dots) p_i$. A quantidade $\ln(1/p_i)$ é algumas vezes chamada de *surpresa* ou *incerteza*. De fato, $p_i = 1$ corresponde à certeza, ou seja, zero surpresa se o evento esperado ocorre; por outro lado, $p_i \rightarrow 0$ corresponde aproximadamente à impossibilidade, ou seja, infinita surpresa se o valor não esperado ocorre. Se introduzimos a q -surpresa (ou q -incerteza) como $\ln_q(1/p_i)$, é então natural definirmos a seguinte q -entropia:

$$S_q \equiv \left\langle \ln_q \frac{1}{p_i} \right\rangle = \sum_{i=1}^W p_i \ln_q \frac{1}{p_i} = \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q - 1}, \quad (4.17)$$

de forma que a forma entrópica não extensiva que postulamos seja

$$S_q = \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q - 1} \quad \left(\sum_{i=1}^W p_i = 1; q \in \mathcal{R} \right), \quad (4.18)$$

onde W é o número total de configurações microscópicas, cujas probabilidades são $\{p_i\}$.

As expressões contínuas e quânticas de S_q são respectivamente dadas por

$$S_q = \frac{1 - \int dx [p(x)]^q}{q - 1}, \quad (4.19)$$

e

$$S_q = \frac{1 - \text{Tr} \rho^q}{q - 1}, \quad (4.20)$$

onde ρ é a matriz densidade. A menos que especificamente declararmos o contrário, vamos usar a forma da Eq. (4.18). É fácil verificar que todas as suas propriedades genéricas podem ser imediatamente adaptadas para ambos os casos contínuo e discreto.

Assumindo a equiprobabilidade (i.e., $p_i = 1/W$) obtemos então

$$S = \frac{W^{1-q} - 1}{1 - q} = \ln_q W, \quad (4.21)$$

que é a base do ensemble microcanônico. Pode ser mostrado que a entropia positiva S_q é côncava (convexa) para $q > 0$ ($q < 0$); esta propriedade implica estabilidade termodinâmica e torna possível para dois sistemas a diferentes temperaturas entrarem em equilíbrio térmico.

Conseqüentemente, é claro que S_q é uma generalização e não uma alternativa para a entropia clássica, porque se $q \rightarrow 1$, esta entropia reproduz a entropia usual de Boltzmann-Gibbs-Shannon ($S_1 = -\sum_{i=1}^W p_i \ln p_i$).

Podemos pensar em q como um parâmetro de viés: $q < 1$ privilegia eventos raros, enquanto que $q > 1$ privilegia eventos comuns. De fato, $p < 1$ elevado a uma potência $q < 1$ permite um valor maior que p , e o aumento relativo $p^q/p = p^{q-1}$ é uma função decrescente de p , i.e., valores de p próximos a 0 (eventos raros) são beneficiados. Correspondentemente, para $q > 1$, valores de p próximos a 1 (eventos comuns) são privilegiados. Assim, a teoria de BG (i.e., $q = 1$) é a estatística neutra, i.e., sem nenhum viés.

Se A e B são dois sistemas independentes (i.e., $p_{ij}^{A+B} = p_i^A p_j^B \forall (i, j)$), então a pseudo-aditividade do q -logaritmo imediatamente implica

$$S_q(A + B) = S_q(A) + S_q(B) + (1 - q)S_q(A)S_q(B). \quad (4.22)$$

Disso segue que $q = 1$, $q < 1$ e $q > 1$ correspondem respectivamente aos casos *extensivo*, *superextensivo* e *subextensivo* (em todos os casos $S_q \geq 0$). É dessa propriedade que a correspondente generalização da mecânica estatística de BG é freqüentemente referida como *mecânica estatística não extensiva*.

A Probabilidade Associada

Para obtermos a distribuição de probabilidade associada com o estado estacionário relevante de nosso sistema (equilíbrio térmico ou meta-equilíbrio) devemos otimizar a forma entrópica não extensiva sob os seguintes limites[11, 101]: o limite da norma dado por

$$\sum_i p_i = 1 ,$$

e o limite da energia generalizado como segue

$$\frac{\sum_i p_i^q E_i}{\sum_i p_i^q} = U_q ,$$

onde $\{E_i\}$ é o conjunto dos autovalores do Hamiltoniano (com condições de contorno específicas), e U_q é um número fixo e finito. Essa otimização gera o peso generalizado

$$p_i = \frac{[1 - (1 - q)\beta_q(E_i - U_q)]^{1/(1-q)}}{Z_q} , \quad (4.23)$$

onde

$$Z_q \equiv \sum_j [1 - (1 - q)\beta_q(E_j - U_q)]^{1/(1-q)} ,$$

e

$$\beta_q \equiv \frac{\beta}{\sum_j p_j^q} ,$$

β sendo o parâmetro de Lagrange otimizado associado com a energia interna generalizada U_q .

Esta distribuição de probabilidade corresponde a um *máximo* (*mínimo*) de S_q para $q > 0$ ($q < 0$). Para $q = 0$, a entropia é constante, $S_0 = W - 1$, e a distribuição é dada por $p_i = [1 - \beta_q(E_i - U_0)] / \sum_{j=1}^W [1 - \beta_q(E_j - U_0)]$ (relembremos o ponto de corte da função q -exponencial para $q < 1$, i.e., os estados para os quais o valor $1 - \beta_q(E_i - U_0) < 0$ não contribui).

A equação (4.23) pode ser reescrita como

$$p_i \propto [1 - (1 - q)\beta' E_i]^{1/(1-q)} \equiv e_q^{-\beta' E_i} ,$$

onde β' é uma “temperatura” renormalizada inversa, e a função q -exponencial é definida como $e_q^x \equiv [1 + (1 - q)x]^{1/(1-q)} = 1/[1 - (q - 1)x]^{1/(q-1)}$ (com $e_1^x = e^x$). Esta função substitui, em um vasto número de relações e fenômenos, o fator usual de BG.

Analogamente, se otimizarmos S_q como dado pela Eq. (4.19) com os limites $\int dx p(x) = 1$ and $\langle\langle x^2 \rangle\rangle_q = \sigma^2$ ($\sigma > 0$), obteremos a q -generalização da distribuição Gaussiana[17]:

$$p_q(x) = \frac{e^{-\bar{\beta}x^2}}{\int dy e_q^{-\bar{\beta}y^2}} \propto \frac{1}{[1 + (q-1)\bar{\beta}x^2]^{\frac{1}{q-1}}} \quad (q < 3), \quad (4.24)$$

com extremidade estendida se $q > 1$, um ponto de corte se $q < 1$, e onde $\bar{\beta}$ pode ser explicitamente relacionado a σ . A variância destas distribuições é finita se $q < 5/3$ e diverge se $5/3 < q < 3$. Para $q = 2$ nós temos a distribuição de Lorentz. Para $q \geq 3$ a função não é normalizável, e assim é inaceitável como uma distribuição de probabilidade.

Outras Possíveis Generalizações da Entropia de Boltzmann-Gibbs

Existiram no passado outras generalizações da entropia de BG. A *Entropia de Renyi* é uma delas e é definida como segue

$$S_q^R \equiv \frac{\ln \sum_{i=1}^W p_i^q}{1-q} = \frac{\ln[1 + (1-q)S_q]}{1-q}. \quad (4.25)$$

Outra entropia foi introduzida por Landsberg e Vedral[104] e independentemente por Rajagopal e Abe[105]. Ela é algumas vezes chamada de *entropia não extensiva normalizada*, e é definida como segue

$$S_q^N \equiv S_q^{LVRA} \equiv \frac{1 - \frac{1}{\sum_{i=1}^W p_i^q}}{1-q} = \frac{S_q}{1 + (1-q)S_q}. \quad (4.26)$$

Uma questão surge naturalmente: por que não usar uma dessas entropias (ou mesmo uma diferente, como a chamada *entropia escort* S_q^E , definida nas Refs.[101, 106]), ao invés da S_q , para generalizar a estatística de BG ? A resposta é bastante direta. S_q^R , S_q^{LVRA} e S_q^E não são côncavas nem experimentalmente robustas, nem permitem uma produção de entropia finita por unidade de tempo, em contraste com a S_q . Mais ainda, essas alternativas não possuem a estrutura sugestiva que S_q exhibe, associada com a derivada generalizada de Jackson. Conseqüentemente, para propósitos termodinâmicos, parece bastante natural considerarmos nos dias de hoje a entropia S_q como o melhor candidato para generalizar a entropia de Boltzmann-Gibbs.

4.1.3 Aplicações Dentro e Fora do Equilíbrio

Uma quantidade considerável de aplicações e conexões têm sido explorada na literatura usando, de várias maneiras, o formalismo não-extensivo. Elas englobam os campos da física, astrofísica, geofísica, química, biologia, matemática, economia, lingüística, engenharia, medicina, fisiologia, psicologia cognitiva, esportes e outros[103]. O fato do alcance de aplicações ser tão vasto provavelmente está profundamente relacionado à ubiquidade da criticalidade auto-organizada[107], estruturas fractais e leis de potência na natureza.

Exemplos que têm sido analisados incluem reassociação em proteínas[108], fluxos de raios cósmicos[109], finanças e economia[110], aniquilação elétron-pósitron[111], plasma de quark-glúon[112], teoria cinética[113], caos clássico[114], caos quântico[115], *entanglement* quântico[116], difusão anômala[117], sistemas Hamiltonianos clássicos de muitos corpos interagindo a longa-distância[118], epilepsia[119], lingüística[120], física nuclear[121], astrofísica, música[122], aglomerações urbanas[123], internet[124], e outros mais, que não são explicados dentro dos conceitos mecânico estatísticos de BG. Sistemas como estes têm sido tratados com sucesso com as funções e conceitos que naturalmente surgem dentro da mecânica estatística não extensiva[11, 101, 102].

4.1.4 Aplicações em Astrofísica e Cosmologia

Conexões entre a dinâmica e a termodinâmica estão longe de serem completamente esclarecidas. Há muito tempo os cientistas suspeitavam que interações de longo alcance modificavam substancialmente várias propriedades termodinâmicas usuais. Enrico Fermi escreveu sobre essa questão em seu famoso livro *Thermodynamics* (1936)[125], e Laszlo Tisza também escreveu sobre isso em 1961 [126]:

Do ponto de vista molecular, aditividade e homogeneidade podem ser esperadas como aproximações razoáveis para sistemas contendo muitas partículas, desde que forças intramoleculares tenham um caráter de curta distância.

Finalmente, de Peter T. Landsberg (1978) temos o seguinte registro[21]:

A presença de forças de longo alcance causam importantes modificações à termodinâmica, algumas das quais não foram inteiramente investigadas ainda.

Em artigos recentes, E.G.D. Cohen[22] e M. Baranger[23] também se dedicaram a essa questão. Se juntarmos todos esses pontos de vista, assim como vários outros presentes na

literatura, com o que vimos até agora, podemos concluir que entropias físicas diferentes da de BG poderiam existir e ser mais apropriadas para descrever sistemas anômalos, como aqueles contendo forças de longo alcance. Entre as possíveis anomalias podemos citar (i) estados de metaequilíbrio (metaestáveis) em grandes sistemas envolvendo forças de longo alcance entre as partículas, (ii) estados de metaequilíbrio em sistemas pequenos, i.e., cujo número de partículas seja relativamente pequeno, digamos até 100-200 partículas, (iii) sistemas vítreos, (iv) algumas classes de sistemas dissipativos, (v) sistemas mesoscópicos com memória não-markoviana, e outros que, de um modo ou de outro, poderiam violar a ergodicidade simples e usual. Tais sistemas devem ter uma estrutura hierárquica, multifractal ou livre de escala em seu espaço de fase.

Mais recentemente, os resultados da mecânica estatística e da teoria cinética não-extensiva vêm sendo aplicados em plasmas e fenômenos astrofísicos; alguns exemplos são o conhecido problema do déficit dos neutrinos solares[18], sistemas politrópicos auto-gravitantes[12, 127, 128], velocidades peculiares de aglomerados de galáxias[19], o fluxo de raios cósmicos[109], e alguns efeitos cosmológicos[129].

Soluções de Equilíbrio Politrópico para as Equações de Vlasov-Poisson:

A primeira aplicação física do formalismo termodinâmico não extensivo foi relacionada ao estudo das soluções de entropia máxima para as equações de Vlasov-Poisson que descrevem sistemas auto-gravitantes de N -corpos como galáxias[12, 127]. A maximização da entropia padrão de BG sobre os limites impostos pela conservação da massa e energia levam a uma distribuição de esfera isotérmica, que tem infinita massa e energia[130]. Na Ref.[12, 127], foi mostrado que a extremização da q -entropy, não extensiva, sobre os mesmos limites levam a uma distribuição de esfera politrópica estelar que, para certos valores do parâmetro livre q , possui massa e energia finita, como fisicamente esperado. Esses trabalhos constituíram a primeira pista sugerindo que o formalismo termodinâmico generalizado baseado na entropia S_q pode ter alguma relevância para o estudo de sistemas exibindo propriedades termodinâmicas não extensivas devido a interações de longo alcance.

Velocidades Peculiares de Aglomerados de Galáxias

O satélite COBE (Cosmic Background Explorer) mediu a velocidade peculiar (diferença de velocidade em relação à média da expansão do universo) de alguns aglomerados de

galáxias espirais. Foi encontrada uma distribuição que exibia um ponto de corte por volta de 500 Km/s . O grupo de astrofísica de Princeton[131] analisou a distribuição de velocidades usando quatro modelos cosmológicos diferentes. Nenhum dos modelos conseguiu reproduzir o ponto de corte observado, apesar deles possuírem vários parâmetros livres de ajuste. Assumindo um modelo extremamente simplificado de um gás clássico ideal, junto com a mecânica estatística não extensiva, contudo, a distribuição de velocidades empírica foi ajustada satisfatoriamente[19]; apenas dois parâmetros de ajuste foram usados: a escala de velocidades e $q \simeq 0.23$. Apesar da extrema simplicidade do modelo, o fato apenas da mudança da estatística padrão pela não extensiva mostrou sua alta eficácia.

Cosmologia:

A mecânica estatística não extensiva também tem sido empregada em uma variedade de problemas em cosmologia e relatividade geral, incluindo a RCF em um universo Robertson-Walker, as dinâmicas de cosmologias inflacionárias, o perfil universal da densidade de halos, fenômenos do universo primordial (e.g., a formação do ${}^4\text{He}$ primordial), entre outros[129].

4.2 Teoria Cinética Não Extensiva

Na dinâmica de gases no contexto astrofísico é importante investigar como o movimento molecular é modificado por um campo de força externo às partículas do sistema. Exemplos particulares são:

- Íons em um campo magnético externo. Como no caso dos quasares, onde temos jatos de partículas de altas energias, como os elétrons, emitindo radiação em raio-X; tais jatos, devido ao campo eletromagnético, são emitidos perpendicularmente ao disco de acreção, formado pela matéria em torno de um buraco negro supermassivo, matéria esta formada pelo gás de uma galáxia hospedeira[132].
- Um gás interglomerado submetido ao campo gravitacional de um aglomerado de galáxias. A força gravitacional de longo alcance permeia todo o sistema, modificando suas propriedades cinéticas[133].

Como vimos até agora na parte estatística, as forças de longo alcance, como a eletromagnética e a gravitacional, parecem desafiar a lógica da estatística extensiva de

Boltzmann-Gibbs, e já vimos que diversos trabalhos apontam a estatística não extensiva como uma teoria mais adequada para explicar sistemas regidos por tais forças. Para tratarmos adequadamente diversos fenômenos astrofísicos e cosmológicos pertinentes, faz-se portanto necessário um tratamento cinético adequado para o gás, que englobe a lógica não extensiva.

No que segue, faremos uma revisão da teoria cinética extensiva padrão e derivaremos, a partir dos conceitos da q-estatística, uma teoria cinética não-extensiva. Os resultados principais estão baseados nas referências[134, 135, 136, 137, 138].

4.2.1 O Caso Extensivo

Como é bem conhecido, a distribuição Maxweliana de velocidades é

$$f(v)_{BG} = n_o \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mv^2}{2k_B T} \right), \quad (4.27)$$

onde m é a massa das partículas, T é a temperatura e n_o é a densidade numérica das partículas na ausência do campo de força externo.

Sabemos também que um gás clássico em equilíbrio e imerso em um campo de força conservativo, $F = -\nabla U(r)$, é descrito por uma função distribuição que difere de uma distribuição de velocidades Maxweliana por um fator exponencial extra, envolvendo a energia potencial. Neste caso, a função de distribuição no equilíbrio total será[139]

$$f(r, v) = n_o \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{\frac{1}{2}mv^2 + U(r)}{k_B T} \right), \quad (4.28)$$

onde m é a massa das partículas, k_B é a constante de Boltzmann, T é a temperatura e n_o é a densidade numérica das partículas na ausência do campo de força externo. Uma vez que essa distribuição é normalizada, é fácil verificar que a densidade numérica será dada por

$$n(r) = n_o \exp \left[-\frac{U(r)}{k_B T} \right], \quad (4.29)$$

onde o fator $\exp[-U(r)/k_B T]$, que é responsável pela inomogeneidade de $f(r, v)$, é usualmente chamado de fator de Boltzmann. A expressão (4.28) vem naturalmente da integração da equação acolisional de Boltzmann, também chamada equação de Vlasov[139]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{F}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad (4.30)$$

quando condições estacionárias são adotadas junto com a suposição de que a distribuição total pode ser fatorada

$$f(r, v) = f_0(v)\chi(r), \quad (4.31)$$

onde $f_0(v)$ representa a função distribuição de Maxwell no equilíbrio, e $\chi(r)$ é uma função escalar de r . Como podemos mostrar, após uma simples normalização, a expressão resultante para $\chi(r)$ é exatamente o fator de Boltzmann para a energia potencial do campo externo, ou seja:

$$\chi(r) = \exp \left[-\frac{U(r)}{k_B T} \right], \quad (4.32)$$

e combinando esse resultado com a equação (4.31), a distribuição de Boltzmann (4.28) é prontamente obtida.

4.2.2 O Caso Não Extensivo

A primeira formulação cinética da estatística não extensiva foi proposta por Silva, Plastino e Lima em 1998[138]. Esses autores deduziram uma distribuição de velocidades no equilíbrio da forma[138, 113]

$$f_0(v) = B_q \left[1 - (1 - q) \frac{mv^2}{2k_B T} \right]^{\frac{1}{1-q}}. \quad (4.33)$$

A equação (4.33) recupera o resultado Maxwelliano no limite $q = 1$. Essa é uma distribuição térmica, cujo efeito principal é estender a Maxwelliana padrão para uma lei de potências. Para $q < 1$, a distribuição possui um ponto de corte térmico no valor máximo permitido para a velocidade das partículas, $v_{max} = \sqrt{2k_B T/m(q-1)}$. A quantidade B_q é uma constante de normalização, dependente de q e escrita em termos de funções Gamma tal que[134, 135]

1. $B_q = n(1 - q)^{1/2} \left(\frac{5-3q}{2} \right) \left(\frac{3-q}{2} \right) \cdot \frac{\Gamma(1/2+1/(1-q))}{\Gamma(1/(1-q))} \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2}$, se $1/3 < q < 1$.
2. $B_q = n(q - 1)^{3/2} \frac{\Gamma(1/(q-1))}{\Gamma(1/(q-1)-3/2)} \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2}$, se $q > 1$.

O parâmetro q quantifica a propriedade de não-aditividade (não extensividade) da entropia associada ao gás, propriedade essa responsável por estender a Maxwelliana padrão em uma lei de potência.

A lei de potência (4.33) pode ser deduzida a partir de duas simples exigências[138]:

1. Isotropia do espaço de velocidades.
2. Uma generalização não extensiva conveniente da condição de fatorização de Maxwell ou, equivalentemente, a suposição de que $F(v) \neq f(v_x)f(v_y)f(v_z)$.

Para $q > 0$, a função distribuição satisfaz o teorema H generalizado, e seu inverso também foi provado, isto é, o equilíbrio colisional é dado pela distribuição não extensiva de velocidades de Tsallis[135].

Discutiremos agora como o termo da energia potencial pode ser introduzido na q -distribuição com base na aproximação cinética[138]. Mais precisamente, mostraremos que uma expressão analítica para a distribuição de equilíbrio de um gás diluído, sob a ação de um campo conservativo, pode também ser calculado como uma solução estacionária da equação de Boltzmann sem termo colisional. Este resultado é significativo para uma discussão preliminar sobre o problema das interações de longo alcance de acordo com a termoestatística não extensiva e a teoria cinética[138, 113].

Vamos considerar um gás diluído e espacialmente inhomogêneo, suposto em equilíbrio na temperatura T . Ele está imerso em um campo de força conservativo externo U de tal modo que $f(r, v)d^3vd^3r$ é o número de partículas com velocidade dentro do elemento de volume d^3v de um valor v e posições dentro do elemento de volume d^3r em torno de r . A equação de Boltzmann estacionária (4.30) pode então ser reescrita como

$$v \cdot \nabla_r f - \frac{1}{m} \nabla_r U \cdot \nabla_v f = 0. \quad (4.34)$$

Para discutirmos os efeitos não extensivos, primeiro devemos lembrar que a condição de fatorização não pode ser aplicada, apriori, no novo contexto. Isso significa que a suposição adotada na Eq. (4.31) deve ser modificada. No espírito do formalismo q -extensivo, uma q -generalização da Eq. (4.31) é apresentada abaixo:

$$f(r, v) = B_q e_q \left[\ln_q \left(\frac{f_0}{B_q} \right) + \ln_q \chi(r) \right], \quad (4.35)$$

onde B_q é uma constante de normalização (definida acima para diferentes intervalos de q) que foi introduzida por conveniência matemática.

As funções q -exp e q -log, $e_q(f)$, $\ln_q(f)$, são definidas como

$$e_q(f) = [1 + (1 - q)f]^{1/1-q}, \quad (4.36)$$

$$\ln_q f = \frac{f^{1-q} - 1}{1 - q}. \quad (4.37)$$

Note que no limite $q \rightarrow 1$ nós recuperamos as funções exponencial e logaritmo. Além disso, $e_q(\ln_q f) = \ln_q(e_q(f)) = f$, como seria esperado para funções inversas. Note também que a decomposição fatorizada (4.31) é recuperada de (4.35) no limite extensivo ($q = 1$).

Como veremos adiante, é também necessário introduzir algumas propriedades da diferenciação da q -exponencial e q -log, como mostradas abaixo:

$$\frac{d \ln_q f}{dx} = f^{-q} \frac{df}{dx}, \quad (4.38)$$

$$\frac{de_q(f)}{dx} = e_q^q(f) \frac{df}{dx}. \quad (4.39)$$

Em particular, para a q -distribuição (4.35), obteremos

$$\nabla_v f = -e_q^q(x) \frac{mv}{k_B T}. \quad (4.40)$$

Agora, substituindo $\nabla_r f$ e $\nabla_v f$ na equação estacionária de Boltzmann (4.34), e realizando alguns cálculos elementares, obtemos

$$\chi^{-q} \nabla \chi \cdot dr = -\frac{1}{k_B T} \nabla U \cdot dr, \quad (4.41)$$

cuja solução pode ser escrita como

$$\chi(r) = e_q \left(-\frac{U(r)}{k_B T} + C \right), \quad (4.42)$$

onde C é uma constante arbitrária.

Agora, inserindo a Eq. (4.42) dentro da Eq. (4.35), e integrando o resultado no espaço de velocidades, segue que

$$\int B_q e_q \left[\ln_q \left(\frac{f_0}{B_q} \right) - \frac{U}{k_B T} + C \right] d^3 v = n(r). \quad (4.43)$$

Finalmente, substituindo a expressão de f_0 e considerando uma região onde $U(r) = 0$ (ou seja, ausência do campo externo), encontramos

$$B_q \int e_q \left(-\frac{mv^2}{2k_B T} + C \right) d^3 v = n_0, \quad (4.44)$$

e da condição de normalização, $n_0 = \int f_0(v) d^3 v$, concluímos que o único valor permitido para a constante de integração é $C = 0$. Conseqüentemente, a Eq. (4.42) torna-se

$$\chi(r) = e_q \left[-\frac{U(r)}{k_B T} \right], \quad (4.45)$$

que é o fator de Boltzmann generalizado para todos os valores possíveis de q .

Finalmente, inserindo esse resultado dentro da Eq. (4.35), obtemos a q -distribuição estacionária na presença de um campo externo[137]

$$f(r, v) = B_q \left[1 - (1 - q) \left(\frac{mv^2}{2k_B T} + \frac{U(r)}{k_B T} \right) \right]^{1/(1-q)} \equiv B_q e_q(-E/k_B T), \quad (4.46)$$

onde E é a energia total das partículas. Portanto, o fator generalizado q -exp para a termoestatística não extensiva de Tsallis pode ser deduzido exatamente se o formalismo padrão é ligeiramente modificado. A densidade numérica de partículas, $n(r) = \int f(r, v) d^3v$, também se torna uma função da posição dada por

$$n(r) = n_0 \left[1 - (1 - q) \frac{U(r)}{k_B T} \right]^{(5-3q)/2(1-q)} \equiv n_0 [e_q(-U/k_B T)]^{\frac{5-3q}{2}}, \quad (4.47)$$

e como esperado, no limite extensivo ($q \rightarrow 1$), as expressões Maxwellianas padrões para $f(r, v)$ e $n(r)$ são prontamente recuperadas.

Capítulo 5

EFEITOS NÃO-GAUSSIANOS NA FORMAÇÃO DE ESTRUTURAS EM GRANDE ESCALA

5.1 Introdução

Como visto no Cap. 3, as estruturas observadas no universo, tais como aglomerados e superaglomerados de galáxias, foram formadas pelo crescimento gravitacional de pequenas perturbações de densidade de baixa amplitude, na época do desacoplamento matéria-radiação (em um *redshift* $z \sim 1000$).

Uma questão teórica importante em cosmologia é como determinar a fração de matéria no universo que formou as estruturas ligadas, e qual a sua distribuição em massa em um dado *redshift* após a recombinação. A densidade numérica de objetos colapsados de uma dada massa, conhecida como *função de massa*, é uma quantidade central na análise das estruturas cósmicas como aglomerados de galáxias. A função de massa pode distinguir facilmente diferentes teorias de formação de galáxias, incluindo se as perturbações seriam Gaussianas ou não[140]. A função de massa é aplicada em uma vasta quantidade de problemas cosmológicos, como as medidas de volumes (eg. lentes galácticas), ou a determinação da normalização do espectro de potências.

Neste capítulo, vamos rever brevemente o formalismo gaussiano que descreve a função de massa dos aglomerados (e possibilitou um bom ajuste aos dados observacionais[141]

e simulações numéricas[8, 142]), originalmente proposto por Press & Schechter[6] (PS). Em seguida discutiremos um formalismo alternativo (não-gaussiano), inspirado na teoria cinética não extensiva.

5.2 Formação de Estruturas na Visão de Press-Schechter (PS): Aspectos Qualitativos

Em sua aproximação analítica, PS assume que o campo de densidade é Gaussiano. Tomamos o campo de densidade inicial, em um tempo bastante recuado, e suavizamos ele na escala R . A evolução do contraste de densidade δ em cada ponto é linear, e quando essa densidade aumenta o suficiente até alcançar o limite $\delta_c \sim 1$, então a densidade nesta região se torna não-linear, ou seja, esta região se torna gravitacionalmente instável, e considerada a partir daí como uma região colapsada (ligada). A fração de partículas ligadas de massa M , a função de massa $F_{(M)}$, é a probabilidade de que a densidade linear seja maior do que o limite δ_c no formalismo PS.

A utilidade do modelo esférico foi enfatizada quando Press & Schechter consideraram a suavização do campo de densidade primordial para determinar as abundâncias relativas das perturbações em diferentes escalas[6]. Quando combinadas com a densidade crítica para o colapso, isso possibilita um modelo estatístico para a formação de estruturas no universo: suavizar as flutuações leva à massa dos objetos colapsados, enquanto que o modelo de perturbações esféricas dá a época de colapso das perturbações que são suficientemente densas para tal.

Apesar de sua importância, a aproximação de PS possui uma dificuldade fundamental: a função de massa possui apenas metade da normalização correta (existe portanto um fator de correção de 2). Para explicar tal falha, os autores argumentaram que apenas metade da massa ligada era contada no seu formalismo, pois as regiões sub-densas não eram corretamente tratadas no processo; eles então simplesmente colocaram manualmente um fator 2 na expressão de $F_{(M)}$, de modo a corrigir a normalização. Na verdade, há algumas propostas aparecendo na literatura tentando corrigir naturalmente esse fator 2. Contudo, a maioria delas, como o *peak ansatz* e as várias soluções de “nuvens-dentro-de-nuvens” (*cloud-in-cloud*)[7, 143], não possuem a simplicidade analítica do formalismo original de

PS.

Alguns desenvolvimentos recentes das simulações massivas de N-corpos, em alta resolução, sugerem que a aproximação de PS não possibilita uma descrição acurada do problema de formação de estruturas[8]. Obviamente, um modelo tão simples iria fatalmente falhar nos detalhes, particularmente dadas as conhecidas complexidades do colapso gravitacional assimétrico, que as atuais simulações numéricas já estão conseguindo quantificar[144, 145]. Contudo, a teoria de PS foi bem sucedida até recentemente, e ainda possibilita um *insight* interessante para o processo de formação das estruturas.

5.3 O Formalismo de Press-Schechter (PS)

Para determinar a função de massa analiticamente precisamos da dinâmica e da estatística. No seu *ansatz* da dinâmica, PS adotou o modelo top-hat esférico, no qual todas as dependências cosmológicas estão contidas na flutuação de densidade quadrática média, $\sigma_{(M)}$, suavizada com um filtro top-hat em uma escala $R^3 = 3M/4\pi\bar{\rho}$. Na sua aproximação estatística, PS assumiu que o campo de densidade inicial seria Gaussiano. Na aproximação de PS, portanto, o campo de densidade primordial é suavizado na escala R , e a evolução do campo de contraste de densidade δ , em cada ponto, é linear; mas quando o contraste de densidade aumenta até o limite $\delta_c \sim 1$, então a densidade nessa região começa a evoluir de forma não-linear, ou seja, essa região se torna gravitacionalmente instável, e consideramos a partir daí que tais regiões de alta densidade irão se condensar como objetos colapsados (ligados) de massa M e tempo t . A fração de partículas ligadas de massa M , $F_{(M)}$, é a probabilidade de que a densidade até então linear seja maior que o limite crítico δ_c no formalismo de PS. A densidade comóvel de partículas ligadas a cada escala de massa, ou seja, a função de massa comóvel $N_{(M)}$, é diretamente relacionada com a fração $F_{(M)}$.

Na aproximação de PS, as perturbações de densidade primordiais seriam flutuações Gaussianas. As fases do contraste de densidade são aleatórias, e sua amplitude pode ser descrita por uma distribuição Gaussiana

$$P(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{(M)}} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma_{(M)}^2}\right), \quad (5.1)$$

onde $\sigma_{(M)}^2 \equiv \langle \delta_M^2 \rangle$ é a flutuação quadrática média. Por definição, objetos ligados são aqueles cujas amplitudes do contraste de densidade se tornam maiores do que um valor

crítico (δ_c) e, como tal, sua fração $F_{(M)}$ em um dado tempo cosmológico pode ser escrita como[151]

$$F_{(M)} = \int_{\delta_c}^{\infty} P(\delta) d\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{(M)}} \int_{\delta_c}^{\infty} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma_{(M)}^2}\right) d\delta, \quad (5.2)$$

e dessa expressão derivamos diretamente a distribuição de objetos ligados com massas entre M e $M + dM$:

$$\frac{dF_{(M)}}{dM} = +\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{(M)}^2} \frac{\delta_c}{\left(\frac{\partial\sigma_{(M)}}{\partial M}\right)} \exp\left(-\frac{\delta_c^2}{2\sigma_{(M)}^2}\right). \quad (5.3)$$

No regime linear, a massa das perturbações é $M = \bar{\rho} \cdot V$ onde $\bar{\rho}$ é a densidade média do fundo. Se dividimos a função de massa da Eq. (5.3) pelo volume V , obtemos finalmente a densidade espacial, ou *densidade numérica comóvel* $N_{(M)}dM$ no tempo t

$$N_{(M)}dM = \frac{\frac{dF_{(M)}}{dM}dM}{V} = +\frac{\bar{\rho}}{M} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{(M)}^2} \left(\frac{\partial\sigma_{(M)}}{\partial M}\right) \cdot \exp\left(-\frac{\delta_c^2}{2\sigma_{(M)}^2}\right) dM. \quad (5.4)$$

Agora podemos ver a fraqueza do formalismo PS: a condição de normalização “in-completa”. A quantidade dF , integrada sobre toda a massa M , deveria dar a unidade; contudo o resultado é

$$\int_0^{\infty} dF = \frac{1}{2}. \quad (5.5)$$

Em outras palavras, o formalismo PS contabiliza apenas metade do total de partículas ligadas do sistema. Como já vimos, PS argumentou que seu formalismo não trata propriamente as regiões sub-densas (problema de nuvens dentro de nuvens, ou *cloud-in-cloud*). Para corrigir isso PS simplesmente multiplica a expressão resultante por 2, sem qualquer razão física.

Para futura referência, notamos que ao introduzirmos a nova variável $\nu = \delta_c/\sigma_{(M)}$ dentro da Eq. (5.3), multiplicada pela massa M e o correspondente fator corretivo 2, obtemos uma expressão simples para a fração da densidade crítica constituída de estruturas ligadas de massa M :

$$\Omega_{(M)PS} = \frac{dF_{(M)}}{d(\ln M)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left| \frac{\partial(\ln \sigma_{(M)})}{\partial(\ln M)} \right| \nu \exp\left(-\frac{\nu^2}{2}\right). \quad (5.6)$$

5.4 Justificativa de Zel'Dovich para a Não-Gaussianidade na Formação das Estruturas

A formação das estruturas presentemente observadas, a partir de um plasma primitivo uniformemente distribuído (homogêneo e isotrópico), é conseqüência de uma ação da gravidade[146, 147].

A princípio, as perturbações de pequeno comprimento de onda devem ser suprimidas por processos dissipativos. Por outro lado, a instabilidade e o conseqüente crescimento das perturbações com grandes comprimentos de onda, pode levar à formação de cruzamentos nas trajetórias das partículas, e à formação de caústicas, semelhantes ao que ocorre na ótica física[148, 149]. O proceso resulta na formação de superfícies, onde a densidade ρ pode ser formalmente infinita. Portanto, o valor quadrático médio da densidade, $\langle \rho^2 \rangle$, é divergente, enquanto a própria densidade ρ nunca pode ser negativa.

Em particular, isso significa que os valores médios podem diferir significativamente dos previstos pela distribuição gaussiana. Existem singularidades, mas a densidade ρ nunca se torna negativa. Dessa forma, as expansões de Fourier das singularidades (caústicas), em curtos comprimentos de onda (altas freqüências), têm grandes amplitudes, enquanto o espectro inicial das amplitudes em altas freqüências decai exponencialmente (ou são nulos). A formação de singularidades pode levar a uma lei de potência para o decrescimento das amplitudes[148, 149].

5.5 q-Estatística e Aproximação de PS

Agora, ao invés das flutuações iniciais Gaussianas, iremos considerar que o contraste pode ser descrito pela distribuição[11, 138, 24, 150, 136] (veja a teoria cinética não extensiva desenvolvida no Cap. 4):

$$P(\delta)_{PL} = \frac{B_q}{\sqrt{2\pi}\sigma_{(M)}} \left[1 - (1 - q) \cdot \left(\frac{\delta}{\sqrt{2}\sigma_{(M)}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{(1-q)}}, \quad (5.7)$$

onde PL denota a Lei de Potência (*Power Law*) não extensiva em q, de modo a distingui-la da aproximação de PS. O fator B_q é a constante de normalização unidimensional que pode assumir as seguintes formas:

$$\text{a) } B_q = (1 - q)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3-q}{2} \right) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{(1-q)}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{(1-q)}\right)}, \quad (\text{se } \frac{1}{3} < q \leq 1)$$

$$\text{b) } B_q = (q - 1)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{(q-1)}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{(q-1)} - \frac{1}{2}\right)}, \quad (\text{se } 1 \leq q < 2)$$

Para todos os valores de q , $\lim_{q \rightarrow 1} B_q = 1$; Sabendo disso e usando a chamada relação de Euler[152]

$$\lim_{d \rightarrow 0} (1 + d \cdot y)^{\frac{1}{d}} = \exp y, \quad (5.8)$$

podemos facilmente ver que

$$\lim_{q \rightarrow 1} P(\delta)_{PL} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{(M)}} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma_{(M)}^2}\right) = P(\delta)_{PS}. \quad (5.9)$$

Como esperado, o formalismo não extensivo se reduz ao formalismo PS se $q \rightarrow 1$.

A fração $F_{(M)}$ de objetos ligados, onde $\delta > \delta_c$, de uma dada massa M em um tempo particular t será, no intervalo $0 < q \leq 1$,

$$F_{(M)_{PL}} = \frac{B_q}{\sqrt{2\pi}\sigma_{(M)}} \cdot \int_{\delta_c}^{\delta_{\max}} \left[1 - (1 - q) \cdot \left(\frac{\delta}{\sqrt{2}\sigma_{(M)}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{(1-q)}} d\delta \quad (5.10)$$

onde o limite $\delta_{\max} = \sqrt{2}\sigma_M / \sqrt{(1-q)}$ é definido pelo argumento da Eq. (5.7). No caso $q \geq 1$, este ponto de corte está ausente, e nós temos $\delta_{\max} \equiv \infty$.

Independentemente dos valores de q , os objetos ligados com massas entre M e $M + dM$ serão descritos por

$$\frac{dF_{(M)_{PL}}}{dM} = + \frac{B_q}{\sqrt{2\pi}} \frac{\delta_c}{\sigma_{(M)}^2} \left(\frac{\partial \sigma_{(M)}}{\partial M} \right) \cdot \left[1 - (1 - q) \cdot \left(\frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma_{(M)}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{(1-q)}}. \quad (5.11)$$

A densidade numérica comóvel $N_{(M)_{PL}} dM$ em um dado tempo t será

$$\begin{aligned} N_{(M)_{PL}} dM &= \frac{dF_{(M)_{PL}}}{dM} dM \\ &= + \frac{\bar{\rho}}{M} \frac{B_q}{\sqrt{2\pi}} \frac{\delta_c}{\sigma_{(M)}^2} \left(\frac{\partial \sigma_{(M)}}{\partial M} \right) \cdot \\ &\quad \left[1 - (1 - q) \cdot \left(\frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma_{(M)}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{(1-q)}} dM. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Novamente, observamos que as funções acima são também reduzidas ao formalismo PS se $q \rightarrow 1$.

Agora usamos a Eq. (5.11), multiplicada pela massa M , com o fator de correção de 2, e definindo $\nu = \delta_c/\sigma_{(M)}$, para encontrarmos a fração de densidade crítica das estruturas ligadas de massa M :

$$\Omega_{(M)PL} = \frac{dF_{(M)}}{d(\ln M)} = B_q \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| \frac{\partial (\ln \sigma_{(M)})}{\partial (\ln M)} \right| \nu \left[1 - (1-q) \cdot \frac{\nu^2}{2} \right]^{\frac{1}{(1-q)}}. \quad (5.13)$$

Como $\sigma_{(M)} \sim M^{-\frac{(3+n)}{6}}$, e considerando o índice do espectro de potências $n = 1$, plotamos na Fig. 5.1 as curvas das equações (5.6) e (5.13). Note que uma vez que $\frac{dF_{(M)}}{d(\ln M)} = M \frac{dF_{(M)}}{dM} = \frac{M^2 N_{(M)}}{\bar{\rho}}$, esses gráficos são idênticos à forma da função multiplicidade. As linhas sólidas superiores e inferiores são, respectivamente, as curvas de PS com normalização corrigida pelo fator 2, e a curva de PS original (com normalização incorreta). Todas as demais curvas são curvas PL com diferentes parâmetros q . Note que para $\log(\nu) > 1$ apresentamos diferentes comportamentos para as extremidades finais, para diferentes valores do parâmetro livre q de nossa aproximação PL, o que contrasta com a curva fixa de PS; tal flexibilidade torna a aproximação PL mais promissora para ajustar os dados observacionais das funções de massa atuais[31].

Notemos também que para pequenas escalas de massa ($M \leq M_*$), em $q \sim \frac{1}{3}$ a função de multiplicidade é sempre maior que a de PS em uma correlação linear constante. Mas como $F_{(M)}$ não se altera, para cancelar o aumento de $\frac{dF_{(M)}}{dM}$ em pequenas escalas, $\frac{dF_{(M)}}{dM}$ decresce mais rápido em escalas maiores ($M \geq M_*$); nossa curva com $q = \frac{1}{3}$ move-se horizontalmente para escalas de massa menores, comparadas com a função de massa de PS. Vemos que para $q = 0,5$, assim que alcançamos $M \sim M_*$ a curva começa a “cair”, pela mesma razão que a curva com $q = \frac{1}{3}$ mencionada anteriormente; mas aqui $\frac{dF_{(M)}}{dM}$ decresce mais lentamente do que no caso $q = \frac{1}{3}$, de modo que em escalas maiores a curva com $q = 0,5$ alcança maiores escalas do que no primeiro caso. A curva com $q = 0,5$ move-se horizontalmente para maiores escalas de massa comparada à curva com $q = \frac{1}{3}$, mas a amplitude geral da função multiplicidade é mais baixa. Quanto mais aumentamos o valor de q , mais baixa a amplitude se torna, e mais deslocada para massas maiores a curva fica. À medida que alcançamos o limite $q \rightarrow 1$, nas escalas de massa pequenas ($M \leq M_*$), a curva PL tende a abaixar sua amplitude (sempre paralelamente às outras

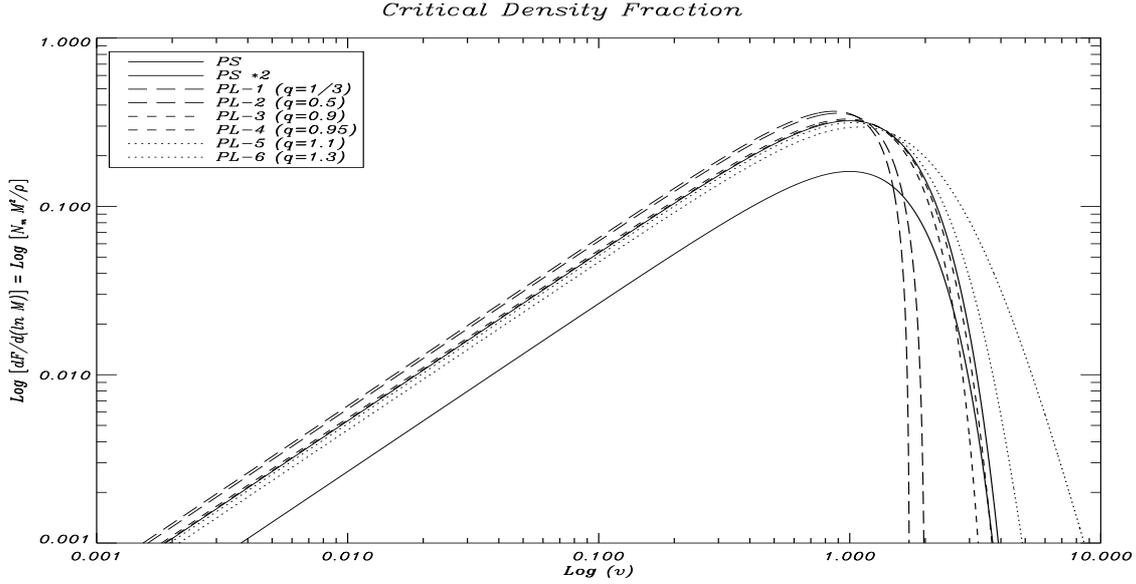


Figura 5.1: Fração da densidade crítica constituída por estruturas ligadas de massa M . As linhas sólidas superiores e inferiores são os modelos de PS corrigidos pelo fator 2 e sem a correção da normalização, respectivamente. As linhas de tracejado longo, tracejado curto e pontilhada são obtidas usando a distribuição PL. Note que o parâmetro q afeta consideravelmente as escalas de maiores massas.

curvas) até finalmente alcançar a curva de PS (com a normalização correta); e a grandes escalas ($M \geq M_*$) a curva tende a se deslocar para massas maiores até também alcançar o resultado de PS, como esperado em nossa análise analítica. As duas linhas tracejadas com $q = 0,9$ e $q = 0,95$ mostram esse comportamento em detalhe. Novamente, mais aumentamos q , mais abaixamos a amplitude e deslocamos a curva para massas maiores, como bem mostrado pelas curvas pontilhadas com $q = 1,1$ e $q = 1,3$.

5.6 Extensões da Aproximação de PS e Nosso Método PL

Vimos que o método PS tem um problema intrínseco de normalização. Integrando sobre toda a massa M , a quantidade $dF_{(M)}$ é igual à $\frac{1}{2}$, ao invés de 1. PS argumentou que em seu formalismo não levamos em conta corretamente as regiões subdensas em um dado tempo t , e tais regiões podem se tornar parte de uma região ligada em um tempo posterior $t + dt$, alcançando metade da massa total usando a estatística Gaussiana. Para corrigir

isso, PS simplesmente multiplicou o resultado por 2, sem qualquer razão física aparente. A busca de um tratamento correto das regiões subdensas, de modo a resolver o problema do fator corretivo 2, foi nomeada de problema de nuvens-dentro-de-nuvens, ou *cloud-in-cloud problem*.

Peacock & Heavens[143] (daqui por diante PH90) e Bond *et al.*[7] (referido a partir daqui como Bond) trataram o problema *cloud-in-cloud* de uma forma bastante rigorosa. Em seu tratamento pequenas estruturas podem ser incluídas em outras estruturas colapsadas maiores, mesmo se suas densidades não tiverem ainda alcançado o limite crítico, e elas aumentam conseqüentemente a fração de massa colapsada total. É importante notar que esse tratamento aumenta o número de objetos colapsados se usamos diferentes funções de filtragem, mas apenas no caso especial dos filtros agudos no espaço dos k (*sharp k-space filters*) o fator corretivo de 2 é realmente recuperado por Bond “sem precisar trapacear”[143]. Este tipo de formalismo também dá uma forma diferente à função de massa (comparado à função de massa de PS): temos muito mais objetos de baixa massa do que na fórmula original de PS[143]. Precisamos também notar a falta de simplicidade no formalismo PH90, comparado ao fácil método de PS.

No importante trabalho de Bond, o espaço é continuamente filtrado por vários filtros afiados (agudos) passa-baixa no espaço dos k , e assumindo isso a densidade em qualquer ponto do espaço obedece um processo de caminhante aleatório à medida que a escala de filtragem decresce. Podemos então usar uma equação de difusão para derivar a probabilidade $P(\delta, \sigma^2)$ de que a trajetória fique entre δ e $\delta + d\delta$ quando a variância do campo de densidade for σ^2 (veja a Ref.[7]):

$$\frac{\partial P}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial \delta^2}$$

Calculando a distribuição de probabilidade das trajetórias que alcançam (δ, σ) sem exceder o valor crítico δ_c em pequenos σ , iremos excluir todos os sistemas não-lineares mais massivos do que M_n , cujas trajetórias atravessam δ_c sobre uma escala de filtragem k_n . A solução *cloud-in-cloud* será bem implementada, resolvendo a equação de difusão acima para $\delta = \delta_c$:

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \left[\exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right) - \exp\left(-\frac{(\delta - 2\delta_c)^2}{2\sigma^2}\right) \right]$$

Integrando a equação acima, a fração de massa que colapsa em objetos não-lineares naturalmente alcança a mesma forma da solução de PS multiplicada pelo fator corretivo 2, assim obtendo naturalmente a normalização correta. A solução de difusão proposta em Bond também possui um ajuste muito bom em comparações com simulações numéricas. Infelizmente, a aproximação só funciona para filtros *sharp-k*. Qualquer outro filtro apresentará correlações entre os passos das trajetórias $\delta - \sigma^2$, e a evolução de tais sistemas é resolvida apenas numericamente.

Yano, Nagashima & Gouda[153] (YNG) mostram que o problema *cloud-in-cloud* não foi considerado de forma completa por PH90 e Bond, porque esses últimos consideraram apenas a probabilidade para as flutuações de densidade em um ponto do espaço, negligenciando as correlações espaciais destas flutuações; YNG mostra que este efeito de correlação espacial altera o formalismo de PS, mesmo usando o filtro *sharp-k*. Jedamzik[154] tratou o problema *cloud-in-cloud* usando a equação integral da função de massa, mas também ele não considerou as correlações espaciais em seu tratamento. YNG corrigiu o trabalho de Jedamzik, derivando os mesmos resultados que PH90 e Bond para o filtro *sharp-k* (sempre sem a correlação espacial) e, usando o método corrigido de Jedamzik e incluindo o efeito da correlação espacial - mas apenas no caso dos filtros *sharp-k*, YNG derivou a nova função de massa. Infelizmente, é muito complicado derivar numericamente a função de massa com esta nova fórmula. Essa falta de simplicidade é um problema bastante desagradável do formalismo YNG, apesar de sua completude e eficácia.

Vimos até agora que a solução *cloud-in-cloud* não nos dá um modelo simples para substituímos o formalismo de PS, que é ainda o mais fácil de usar e apresenta bons ajustes com diversos dados observacionais e numéricos. Nosso método PL, contudo, é tão simples quanto o de PS, com duas grandes vantagens: primeiro, ele apresenta uma forte conexão teórica com a entropia não extensiva (que trata sistemas de interação de longa distância, que é o caso das forças gravitacionais envolvidas na formação de estruturas; ou seja, nós consideramos o “efeito de correlação” mencionado por YNG, de forma simples e analítica); segundo, temos um parâmetro livre q , o que concede maleabilidade no ajuste dos dados de função de massa atuais. Essencialmente temos uma melhor parametrização do que nas curvas de PS, com uma função de distribuição fisicamente motivada, que retorna ao caso original de PS quando q tende a 1.

Mas o objetivo principal de todas as soluções *cloud-in-cloud* está na correção da normalização do método de PS. Precisamos realizar um estudo completo das normalizações das funções de massa para verificar se nossa distribuição apresenta o mesmo problema intrínseco da de PS, e se apresenta, tentar então entender por que, e ainda, quais as dependências da condição de normalização com a distribuição estatística do campo de densidades primordiais.

5.7 O Problema da Normalização

Vamos considerar o problema da normalização em nossa aproximação PL. Em princípio, a quantidade dF , da Eq. (5.11), integrada sobre toda a massa M deveria ser igual à unidade. Contudo, é fácil verificar que a integração fornece

$$\int_{\tau}^{\infty} dF = \frac{1}{2}, \quad (5.14)$$

onde $\tau = 0$ no intervalo $1 \leq q < 2$; mas no intervalo $0 < q \leq 1$ nós temos um ponto de corte em nossa função quando $(1 - q) \cdot \left(\frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma_{(M)}}\right)^2 = 1$, tal que $\tau = \sigma_{\min}$. O aspecto intrigante aqui é que o mesmo valor da aproximação Gaussiana de PS é obtido.

Analisando mais atentamente a condição de normalização de nossa aproximação, concluímos que a distribuição não extensiva não resolve o problema de normalização incompleta também presente no formalismo Gaussiano de PS, ou seja, também apenas e precisamente metade da massa é contada quando a função de massa é normalizada. Essa simples mas intrigante coincidência é o motivo de nosso estudo das condições de normalização[32]. Basicamente, gostaríamos de saber se o fator corretivo 2 tem algum grau de universalidade dentro do formalismo de PS. Devido à generalidade da q -estatística (ela também inclui a distribuição de Lorentz como um caso particular, além da Gaussiana), poderíamos ser tentados a pensar que o problema de normalização no formalismo de PS poderia ser independente da distribuição estatística que descreve as flutuações primordiais de densidade.

No que segue, considerando alguns exemplos explícitos, mostramos que a normalização da função de massa depende fortemente da distribuição considerada. Em particular, descobrimos que a função de massa é enfim normalizada se assumimos que as perturbações

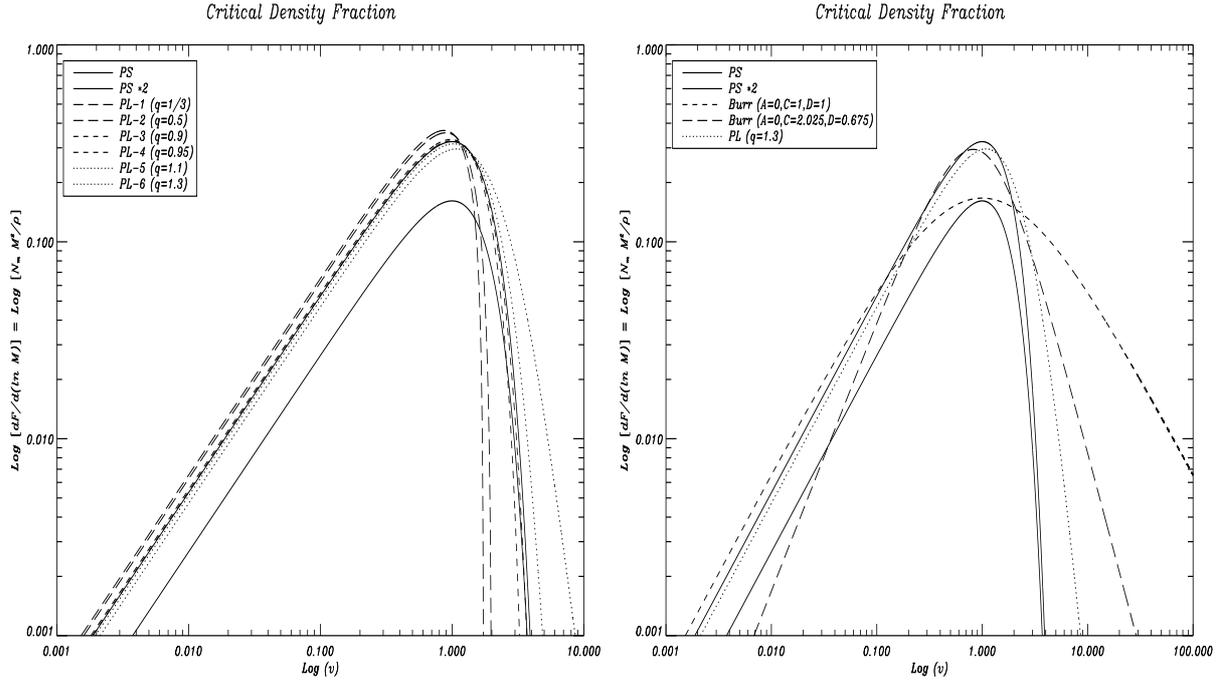


Figura 5.2: Fração da densidade crítica constituída por estruturas ligadas de massa M . Em ambos os painéis as linhas sólidas superiores e inferiores são os modelos de PS corrigidos pelo fator 2 e sem a correção da normalização, respectivamente. As linhas de tracejado longo, tracejado curto e pontilhada no painel esquerdo são obtidas usando a distribuição PL. No painel direito comparamos o comportamento da função de massa usando a distribuição de Burr (as linhas de tracejado curto e longo) com a mesma função de massa usando os métodos de PS (linhas sólidas) e PL (linha pontilhada).

iniciais são descritas pela assim chamada distribuição de Burr[155], não importando os valores assumidos por seus parâmetros livres.

Trabalhando alguns exemplos específicos, mostramos que o problema de normalização de PS depende, em geral, da classe adotada de funções de distribuição que descrevem as perturbações de densidade primordiais. Concentramos nossa atenção nas distribuições Log-normal e Burr.

A distribuição Log-Normal geral normalizada é definida por:

$$p(\delta) = \frac{1}{\delta \cdot B \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left[\frac{\log \delta - A}{B} \right]^2 \right). \quad (5.15)$$

Na expressão acima o parâmetro B é uma função da massa. Além disso, para simplificar os cálculos, o chamado parâmetro de deslocamento A é escolhido como sendo

identicamente nulo. Como podemos verificar, a função de massa agora assume a forma[32]

$$\frac{dF_{(M)Log-Normal}}{dM} = + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\log \delta_c}{B^2} \left(\frac{\partial B}{\partial M} \right) \cdot \exp \left(- \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\log \delta_c}{B} \right), \quad (5.16)$$

com $\int_0^\infty dF = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, que é diferente de $1/2$. Isso mostra que o problema de normalização de PS depende da distribuição inicial, e para algumas classes particulares o fator corretivo pode ser igual a 2. Isso acontece, no caso, com a distribuição Gaussiana (no método padrão de PS), com a distribuição não extensiva PL e com a distribuição de Laplace (no caso dessa última, cujos cálculos não são detalhados aqui, o fator 2 é obtido apenas se consideramos regiões densas, no lugar das subdensas).

Vamos agora discutir o comportamento intrigante da distribuição normalizada de Burr. Foi recentemente verificado que essa distribuição, conhecida desde 1940, é uma generalização da q-exponencial[156], e uma vez que essa última é em si mesma uma generalização da Gaussiana, concluímos então que a distribuição de Burr é uma forte candidata a substituir a descrição estatística do campo primordial das perturbações; ela possui as propriedades da q-exponencial, pois é uma generalização desta, e ainda consegue corrigir o problema de normalização do formalismo original de PS. Vamos verificar isso em detalhes a partir da distribuição de Burr, mostrada abaixo:

$$p_{(\delta)} = \left(\frac{CD}{B} \left(\frac{\delta - A}{B} \right)^{-C-1} \left[1 + \left(\frac{\delta - A}{B} \right)^{-C} \right] \right)^{-D-1}, \quad (5.17)$$

onde $0 < C, D \leq 100$ (veja a Ref.[155]). Tomando novamente $A = 0$, $B = B(M)$, e os parâmetros C e D como constantes, encontramos

$$\frac{dF_{(M)Burr}}{dM} = + \frac{CD}{B} \left(\frac{\delta_c}{B} \right)^{-C} \left(\frac{\partial B}{\partial M} \right) \cdot \left[1 + \left(\frac{\delta_c}{B} \right)^{-C} \right]^{-D-1}. \quad (5.18)$$

Neste caso, é também fácil verificar que[32]

$$\int_0^\infty dF = 1, \quad (5.19)$$

não importando os valores assumidos pelas constantes C e D (elas se cancelam no processo de integração). Note que, embora apresente mais parâmetros livres que outras distribuições consideradas anteriormente, o resultado da aproximação de PS baseada na distribuição de Burr satisfaz a condição de normalização. Essa propriedade inesperada sugere que a distribuição de Burr pode fornecer uma descrição conveniente da física por

trás do processo de formação de estruturas. No caso desta distribuição, a fração de densidade crítica é

$$\Omega_{(M)Burr} = \frac{dF_{(M)}}{d(\ln M)} = CD \left| \frac{\partial(\ln B)}{\partial(\ln M)} \right| \nu^{-c} [1 + \nu^{-c}]^{-D-1}. \quad (5.20)$$

Na Fig. 5.2 mostramos a fração de densidade crítica constituída por estruturas ligadas de massa M . Em ambos os painéis as curvas sólidas superiores e inferiores são as curvas PS corrigida pelo fator 2 e PS não corrigida, respectivamente. As curvas de tracejado longo, tracejado normal e pontilhado, no painel esquerdo, são obtidas usando a distribuição PL. No painel direito comparamos o comportamento usando a distribuição de Burr (as curvas de tracejado normal e longo) com as curvas de PS (linhas sólidas) e PL (linha pontilhada). Vemos claramente que a distribuição de Burr é uma função viável e possível para descrever o campo de densidade primordial, tendo a grande vantagem da normalização correta[32].

Um estudo mais detalhado envolvendo aplicações físicas da distribuição de Burr, como uma distribuição não-Gaussiana possível na descrição do campo de flutuações primordiais, ainda precisa ser feito. Aqui nos limitamos apenas a apontar o apelo matemático poderoso concernente à normalização da função derivada dF . Também seria muito interessante um estudo futuro da distribuição de Kaniadakis ou k-exponencial[157], uma vez que esta também, como a q-exponencial, se reduz à estatística padrão de Boltzmann-Gibbs para um certo valor de seu parâmetro livre (no caso, quando k tende a zero). Uma possível relação entre a k-exponencial e a Burr, ou a q-exponencial, poderia ser de relevância para uma melhor compreensão da não-gaussianidade do campo primordial de flutuações de densidade.

5.8 Efeitos Não-Gaussianos no Plano $\sigma_8 - \Omega_m$

Nos últimos anos, a aproximação original de PS começou a apresentar problemas em ajustar os novos dados das simulações massivas de N-Corpos e os mais recentes dados observacionais. Particularmente no caso de uma amostra de aglomerados galácticos limitados no fluxo de raio-X, baseada no *ROSAT All-Sky Survey* (daqui por diante nomeada como HIFLUGCS), referenciada no artigo de Reiprich & Boehringer[10] (Reiprich, de agora em diante), concluímos que usando a aproximação de PS com os dados de tal amostra, temos como melhor ajuste um parâmetro de massa Ω_m igual a 0,12 (que é muito baixo com-

parado com os resultados independentes da RCF, em torno de $0,27[158, 4, 5]$, e temos também um parâmetro σ_8 de $0,96$ (que é muito alto, baseado nos dados mais atualizados do WMAP[5]).

Já propusemos[31] uma aproximação alternativa para calcular a função de massa de aglomerados galácticos, consistindo em uma distribuição de lei de potências (PL, de “*Power Law*”), que parametriza o formalismo de PS; simples como a PS e tendo um parâmetro livre q que poderia ser usado para ajustar melhor os recentes dados observacionais e das simulações numéricas. Nós igualmente propusemos um estudo do problema da normalização[32] mostrando que ela depende da distribuição escolhida (como a Gaussiana ou sua extensão, a nossa PL).

Vamos agora mostrar que nosso formalismo PL ajusta muito bem os dados do HIFLUGCS, possibilitando ao mesmo tempo parâmetros cosmológicos compatíveis com todas as demais medidas independentes na literatura, mesmo levando em conta modelos com energia escura[34]. Mostraremos também que nosso método PL pode ser útil para limitar parâmetros cosmológicos, do mesmo modo.

5.8.1 O Modelo Teórico de PS com os Dados do HIFLUGCS

Uma nova amostra de aglomerados de galáxias, com fluxo limitado de raio-X, é aqui apresentada, baseada no *ROSAT All-Sky Survey*, onde 63 dos aglomerados mais brilhantes foram compilados. Massas gravitacionais foram determinadas usando perfis de densidade dos gases interaglomerados, derivados principalmente das observações do *ROSAT PSPC*, e usando as temperaturas do gás das observações da *ASCA*, assumindo equilíbrio hidrostático. Essa amostra e uma amostra estendida de 106 aglomerados de galáxias foram usadas para estabelecer em raio-X a relação massa gravitacional - luminosidade. Da amostra completa a função de massa dos aglomerados de galáxias foi determinada, e usada para limitar a densidade média de matéria cósmica e a amplitude das flutuações de massa..

Tendo determinada a massa integrada como uma função do raio, um raio fisicamente aceitável para a medida da massa precisa ser definido. Os raios comumente usados são o raio de Abell, r_{200} , ou r_{500} . O raio de Abell é fixado em $r_A \equiv 3 h_{50}^{-1} \text{ Mpc}$. O raio r_{200} (r_{500}) é o raio dentro do qual a densidade média da massa gravitacional será $\langle \rho_{\text{tot}} \rangle = 200$ (500) ρ_c .

A densidade de matéria cósmica crítica é definida como $\rho_c \equiv 3 H^2 / (8 \pi G)$, onde $H^2 = H_0^2 E(z)^2$ e $E(z) = [\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_\Lambda]^{1/2}$. Foi mostrado que, devido à sua proximidade de nós, uma correção para o *redshift* não é necessária para os aglomerados incluídos no HIFLUGCS[159], e conseqüentemente usamos o *redshift* igual a zero para todos os nossos cálculos, i.e., $\rho_c = 4.6975 \times 10^{-30} \text{g cm}^{-3}$, a menos que explicitemos de outro modo.

Para conseguirmos tratar aglomerados de tamanhos diferentes de um modo homogêneo, determinamos a massa do aglomerado para uma densidade característica, mas também determinamos a massa formalmente em um dado raio fixo, para comparação. Modelos de colapso esférico predizem uma densidade Virial dos aglomerados de $\langle \rho_{\text{vir}} \rangle \approx 178 \rho_c$ para $(\Omega_m = 1, \Omega_\Lambda = 0)$, assim uma aproximação pragmática para a massa de Virial seria usar r_{200} como o contorno do limite externo. Os resultados mais acurados são esperados para $M_{\text{tot}}(< r_{500}) \equiv M_{500}$, mas para uma comparação entre as funções de massa preditas M_{200} é o valor mais apropriado[10].

Usamos o formalismo padrão baseado na prescrição de Press–Schechter (PS) para predizer as funções de massa dos aglomerados em um dado modelo cosmológico (veja, e.g., [160]). A função de massa é portanto dada pela Ref.[6, 7] (veja, e.g., [161] para uma compilação das funções de massa estendidas de PS já publicadas até então):

$$\frac{dn(M)}{dM} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\bar{\rho}_0}{M} \frac{\delta_c(z)}{\sigma(M)^2} \left| \frac{d\sigma(M)}{dM} \right| \exp \left(-\frac{\delta_c(z)^2}{2 \sigma(M)^2} \right).$$

aqui M representa a massa de Virial do halo (do aglomerado) e $\bar{\rho}_0 = 2,7755 \times 10^{11} \Omega_m h_{100}^2 M_\odot \text{Mpc}^{-3}$ é a densidade média de matéria do momento presente. A densidade linear computada no presente é $\delta_c(z) = \delta_c v(z) D(0) D(z)^{-1}$, onde a densidade linear no tempo de virialização, $\delta_c v(z)$, é computada usando o modelo de colapso esférico como mostrado na Ref.[162], para $\Omega_m = 1$ usando (A2) e para $\Omega_m < 1 \wedge \Omega_k = 0$ usando (A6,7); o fator de crescimento linear é dado por $D(z) = 2,5 \Omega_m E(z) \int_z^\infty (1+z') E(z')^{-3} dz'$, onde $E(z)$ foi definido acima. A variância das flutuações de densidade é

$$\sigma(M)^2 = \sigma_8^2 \frac{\int_0^\infty k^{2+n} T(k)^2 |W(k R(M))|^2 dk}{\int_0^\infty k^{2+n} T(k)^2 |W(k 8 h_{100}^{-1} \text{Mpc})|^2 dk}, \quad (5.21)$$

onde σ_8 representa a amplitude das flutuações de densidade em esferas de raio $8 h_{100}^{-1} \text{Mpc}$. Medidas recentes das anisotropias da RCF indicam que o índice do espectro de potência

primordial, n , tem valor próximo a 1 [163, 164] e é então fixado em 1, a menos que explicitemos de outra forma. Para a função de transferência, usamos a fórmula de ajuste para cosmologias Cold Dark Matter (CDM) fornecidas na Ref.[165], para $q(k) = k/(\Gamma h_{100} \text{ Mpc}^{-1})$

$$T(k) \equiv T(q(k)) = \ln(1 + 2,34q)/(2,34q) \times [1 + 3,89q + (16,1q)^2 + (5,46q)^3 + (6,71q)^4]^{-1/4}, \quad (5.22)$$

onde o parâmetro de forma é dado por (modificado para englobar uma pequena densidade bariônica $\Omega_b > 0$)[166]

$$\Gamma = \Omega_m h_{100} \left(\frac{2,7 \text{ K}}{T_0} \right)^2 \exp \left(-\Omega_b - \sqrt{\frac{h_{100}^2 \Omega_b}{0,5 \Omega_m}} \right). \quad (5.23)$$

Usamos a temperatura da RCF $T_0 = 2,726 \text{ K}$ [167], $\Omega_b h_{100}^2 = 0,0193$ [168], e $h_{100} = 0,71$ [169]. O raio comóvel do filtro, $R(M) = [3M/(4\pi\bar{\rho}_0)]^{1/3}$, para a função do filtro top hat $W(x) = 3(\sin x - x \cos x)/x^3$, é adotada nessa análise, porque as massas do HIFLUGCS também foram determinadas usando um filtro top hat. Uma vez que a receita de PS definida acima assume massas de Virial baseadas no modelo de colapso esférico, usaremos M_{200} como aproximação para as massas de Virial.

Para o modelo ser independente do conhecimento preciso da relação luminosidade-massa, L_X-M_{tot} , a comparação quantitativa foi realizada usando um procedimento estatístico padrão de chi-quadrado (χ^2) sobre as funções de massa diferenciais binadas, dadas na Fig. 5.3 (em vez de usarmos uma aproximação de máxima verossimilhança na distribuição de massa). Após identificarmos a posição onde o χ^2 é mínimo, em uma grande região do espaço de parâmetros do plano $\Omega_m-\sigma_8$, os valores de χ^2 foram calculados em uma grade fina de 200 por 200 valores de $\Omega_m-\sigma_8$ no intervalo $0,05 \leq \Omega_m \leq 0,26$ e $0,65 \leq \sigma_8 \leq 1,30$. Uma geometria cosmológica plana foi assumida, i.e. $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$. A constante cosmológica entra no cálculo apenas através de δ_c , e teria uma influência pequena no processo. As elipses estatísticas de erro, para alguns níveis padrões de confiança estatística, são mostradas na Fig. 5.4. Os limites apertados obtidos mostram que com a amostra HIFLUGCS podemos ir além de determinar uma simples relação $\Omega_m-\sigma_8$: podemos pôr limites em Ω_m e σ_8 individualmente. Fazendo isso teremos

$$\Omega_m = 0.12_{-0.04}^{+0.06} \quad \text{e} \quad \sigma_8 = 0.96_{-0.12}^{+0.15} \quad (5.24)$$

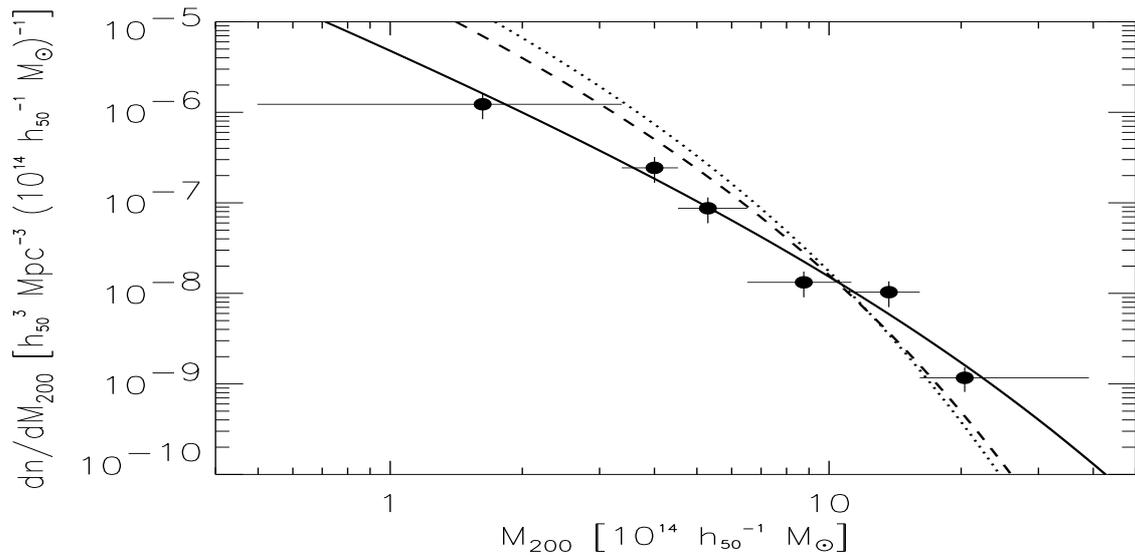


Figura 5.3: Função de massa de HIFLUGCS comparada com o modelo de melhor ajuste em $\Omega_m = 0,12$ e $\sigma_8 = 0,96$ (linha sólida). Vemos igualmente os modelos de melhor ajuste da função de massa quando fixamos $\Omega_m = 0,5$ ($\Rightarrow \sigma_8 = 0,60$, linha tracejada) e $\Omega_m = 1,0$ ($\Rightarrow \sigma_8 = 0,46$, linha pontilhada).

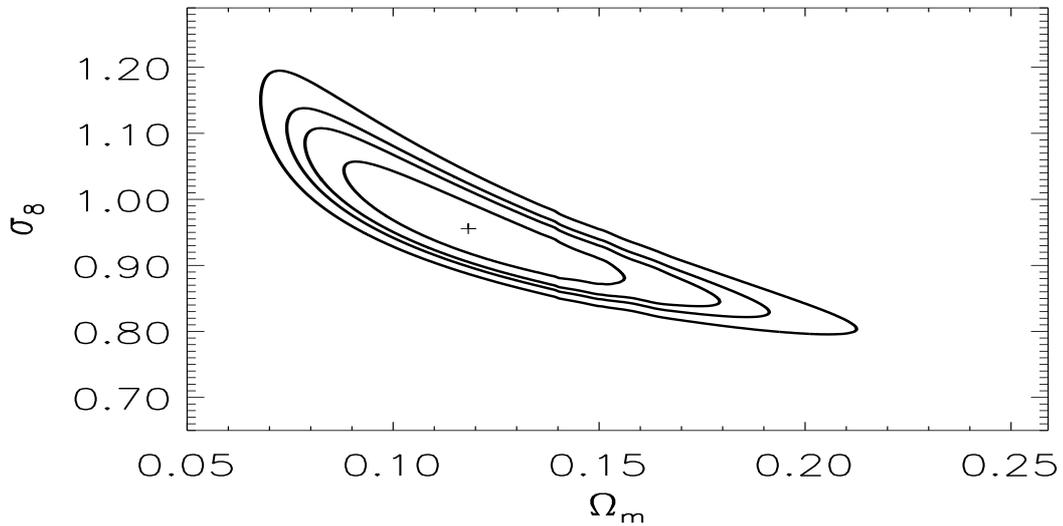


Figura 5.4: Contornos de confiança estatística para o teste χ^2 . A cruz indica a posição do mínimo, χ_{\min}^2 . As elipses indicam os níveis de confiança de 68%, 90%, 95%, e 99% para dois parâmetros de interesse, i.e. $\Delta\chi^2 \equiv \chi^2 - \chi_{\min}^2 = 2,30, 4,61, 6,17$ e $9,21$, respectivamente.

(90 % c.l. de incerteza estatística, para dois parâmetros de interesse), indicando um valor relativamente baixo para o parâmetro de densidade. Na Fig. 5.3 nós também plotamos os modelos de melhor ajuste das funções de massa, para os valores dados de $\Omega_m = 0.5$ e $\Omega_m = 1.0$, e notamos imediatamente que estes valores dão uma descrição bastante pobre da forma da função de massa.

Também testamos se os desvios do formalismo de PS, comparados com os resultados das grandes simulações de N -Corpos[170, 145], têm uma influência significativa nos resultados obtidos aqui. Comparamos o modelo PS de melhor ajuste ($\Omega_m = 0.12$, $\sigma_8 = 0.96$) ao modelo obtido usando a função de massa ‘universal’ (ajustada às simulações de N -Corpos[145]), usando os mesmos parâmetros. Estes dois modelos concordam bem para $M \leq 10^{15} h_{50}^{-1} M_\odot$. As diferenças se tornam maiores que o tamanho das barras de erro Poissoniano (Fig. 5.3) para $M \geq 2 \times 10^{15} h_{50}^{-1} M_\odot$, de modo que a função de massa de Jenkins[145] prediz maior abundância de aglomerados que PS. Para valores maiores de Ω_m as diferenças se tornam comparáveis ao tamanho das barras de erro das massas menores, e.g., para $\Omega_m = \sigma_8 = 0.5$ around $M \sim 5 \times 10^{14} h_{50}^{-1} M_\odot$. Para estimar a influência destas diferenças sobre os valores de melhor ajuste, derivados usando as funções de massa de PS, nós ajustamos os parâmetros do modelo de Jenkins para reproduzir a função de massa de PS, achando $\Omega_m = 0.15$ e $\sigma_8 = 0.86$. O valor de Ω_m se torna um pouco maior, mas a combinação de ambos os valores está ainda contida dentro da elipse de erro de 90 %. Concluimos então que as diferenças entre os modelos das funções de massa não afetam significativamente a interpretação da função de massa observacional de HIFLUGCS. Mais ainda, esse teste confirma a validade da função de massa de PS para a acurácia exigida aqui.

5.8.2 O Modelo PL e o Ajuste aos Dados do HIFLUGCS

No artigo de Reiprich[10] uma compilação dos dados do HIFLUGCS (uma amostra de aglomerados de galáxias com fluxo de raio-X limitado, baseada nos dados do ROSAT, como descrito anteriormente) foi estabelecida. A função de massa desses dados observacionais foi comparada com a da aproximação teórica de PS. Reiprich realiza então um procedimento estatístico padrão de χ^2 e acha os parâmetros de melhor ajuste abaixo:

$$\Omega_m = 0.12_{-0.04}^{+0.06} \quad \text{e} \quad \sigma_8 = 0.96_{-0.12}^{+0.15} \quad (5.25)$$

Vemos que Ω_m é muito baixo, completamente fora de alcance, comparado com os mais recentes resultados independentes da RCF[158, 4, 5], e o σ_8 é muito alto, também fora dos limites, baseado nos mais atualizados dados do WMAP[5]; tais dados da RCF são mostrados abaixo:

$$\Omega_m = 0,234_{-0,035}^{+0,035} \quad \text{e} \quad \sigma_8 = 0,76_{-0,05}^{+0,05} \quad (5.26)$$

Tabela 5.1: Parâmetros do modelo Λ CDM de Lei de Potências e intervalos de confiança de 68%. Os ajustes do terceiro ano do WMAP, nesta tabela, não assumem contribuições de SZ ($A_{SZ} = 0$), de modo a permitir comparações diretas com os resultados do primeiro ano do WMAP.

Parameter	First Year	WMAPext	Three Year	First Year	WMAPext	Three Year
	Mean	Mean	Mean	ML	ML	ML
$100\Omega_b h^2$	$2.38_{-0.12}^{+0.13}$	$2.32_{-0.11}^{+0.12}$	2.23 ± 0.08	2.30	2.21	2.23
$\Omega_m h^2$	$0.144_{-0.016}^{+0.016}$	$0.134_{-0.006}^{+0.006}$	0.126 ± 0.009	0.145	0.138	0.128
H_0	72_{-5}^{+5}	73_{-3}^{+3}	74_{-3}^{+3}	68	71	73
τ	$0.17_{-0.07}^{+0.08}$	$0.15_{-0.07}^{+0.07}$	0.093 ± 0.029	0.10	0.10	0.092
n_s	$0.99_{-0.04}^{+0.04}$	$0.98_{-0.03}^{+0.03}$	0.961 ± 0.017	0.97	0.96	0.958
Ω_m	$0.29_{-0.07}^{+0.07}$	$0.25_{-0.03}^{+0.03}$	0.234 ± 0.035	0.32	0.27	0.24
σ_8	$0.92_{-0.1}^{+0.1}$	$0.84_{-0.06}^{+0.06}$	0.76 ± 0.05	0.88	0.82	0.77

As novas estimativas do WMAP acima podem ser sintetizadas, com outros parâmetros cosmológicos, na tabela 5.1, da Ref.[5].

Nós realizamos exatamente o mesmo procedimento χ^2 que o Reiprich fez, seguindo as mesmas condições e arcabouço teórico geral, mas ao invés de usarmos a função de massa de PS nós usamos nossa aproximação PL (equação (5.12), onde no termo $\frac{\rho}{M}$, ρ é a densidade média de matéria no presente e M é a massa de Virial do halo). Reiprich usa a

função de massa de PS multiplicada por 2 (para corrigir a normalização), e fazemos então do mesmo modo com nossa função de massa PL. Como temos dois intervalos em nossa aproximação ($[-1 < q < 1]$ e $[1 < q < 3]$), os resultados serão apresentados em relação a cada um deles.

No intervalo $[-1 < q < 1]$, quando fixamos $q = 0,93$ e realizamos o teste de χ^2 para os parâmetros de $\Omega_m - \sigma_8$, encontramos como melhor ajuste $\Omega_m = 0,109$ (ou seja, ainda *menor* do que usando o método de PS) e $\sigma_8 = 1,058$, que é maior do que o valor esperado atualmente, em relação aos dados da RCF (topo da figura A.6). À medida que aumentamos o valor de q , temos maiores valores de Ω_m e menores valores de σ_8 como parâmetros de melhor ajuste (os primeiros 3 painéis de cima para baixo da Fig. A.6), até o limite máximo do intervalo, em $q = 1,0$, quando obtemos os mesmos parâmetros do método de PS, como era esperado (Fig. A.6, último painel inferior). Como conclusão, o intervalo $[-1 < q < 1]$ em nosso método PL apresenta ainda *piores* parâmetros cosmológicos do que usando o método padrão de PS.

Agora analisamos o intervalo $[1 < q < 3]$. Na figura A.7 fixamos dois valores diferentes de q , um muito próximo ao limite inferior do intervalo ($q = 1,03$) e outro um pouco maior ($q = 1,30$), e realizamos o teste χ^2 para os parâmetros $\Omega_m - \sigma_8$. Notamos que uma relativamente pequena variação em q produz imensa variação nas duas constantes cosmológicas, possibilitando-nos fixar o *intervalo físico de q* entre os limites $[1,03 \leq q < 1,30]$. Na figura 5.7 mostramos como nosso método PL é melhor do que o de PS: no painel superior, vemos os resultados de Reiprich, que usa o método PS (equivalentes ao nosso método para $q \rightarrow 1$), e notamos que Ω_m é muito baixo, e σ_8 um pouco alto (comparando com resultados independentes recentes da RCF, como discutimos acima). À medida que aumentamos o valor de q , temos maiores valores de Ω_m e menores valores de σ_8 como melhor ajuste, e finalmente o painel inferior mostra que podemos ter parâmetros cosmológicos dentro dos limites das mais atuais estimativas da RCF, apenas mudando o método PS pela nossa aproximação PL.

Na figura 5.8, fixamos $\Omega_m = 0,20$ e realizamos um teste χ^2 no plano $q - \sigma_8$; como resultado temos um contorno estatístico transversal e quase plano, mostrando uma clara dependência linear entre q e σ_8 . Veremos o mesmo comportamento no plano $q - \Omega_m$, fixando σ_8 .

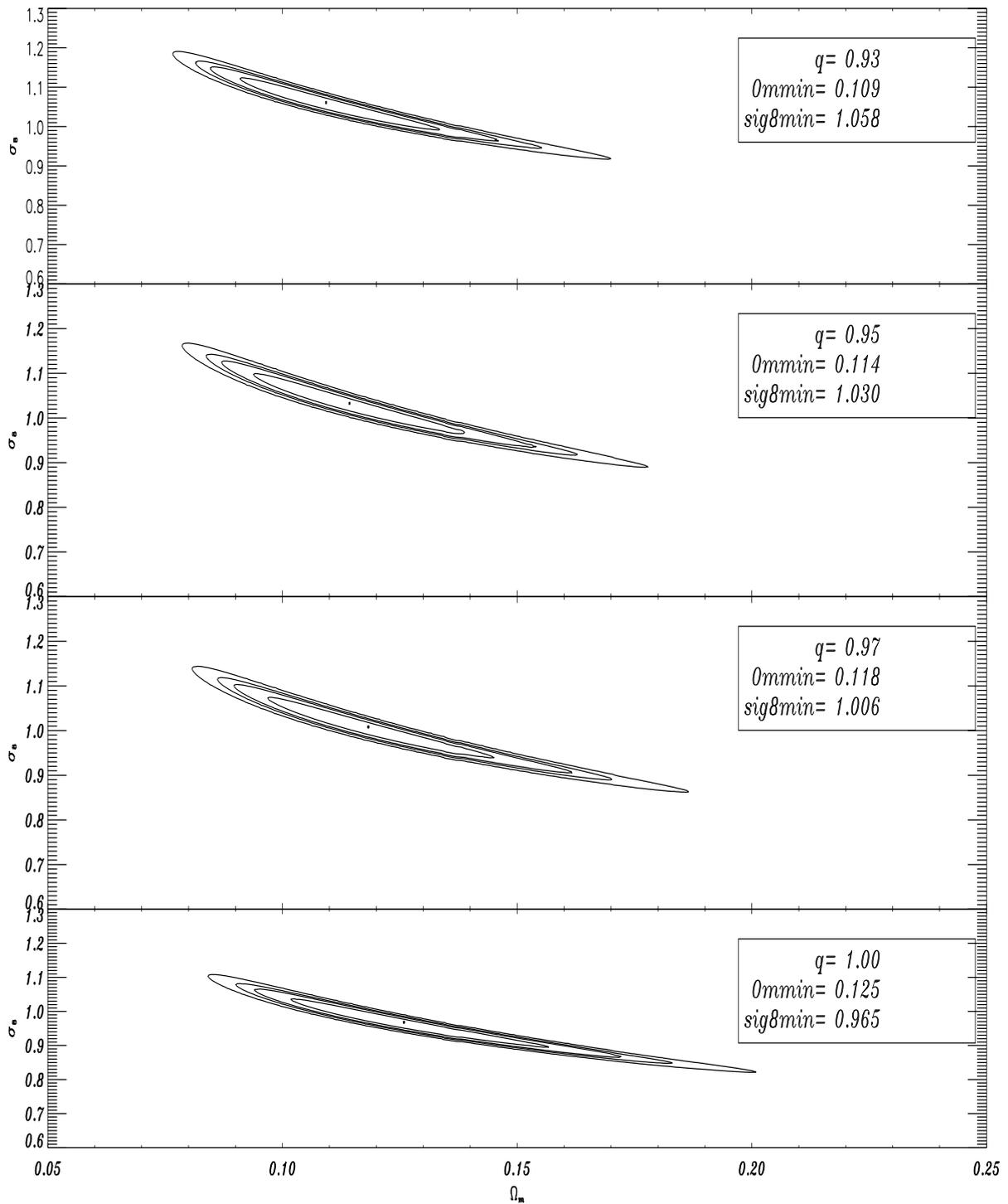


Figura 5.5: O intervalo $[-1 < q < 1]$. Fixamos q e realizamos um teste χ^2 para os parâmetros $\Omega_m - \sigma_8$. À medida que aumentamos o valor de q , temos maiores Ω_m e menores σ_8 como melhor ajuste. No limite $q = 1,0$ obtemos o mesmo resultado do método PS.

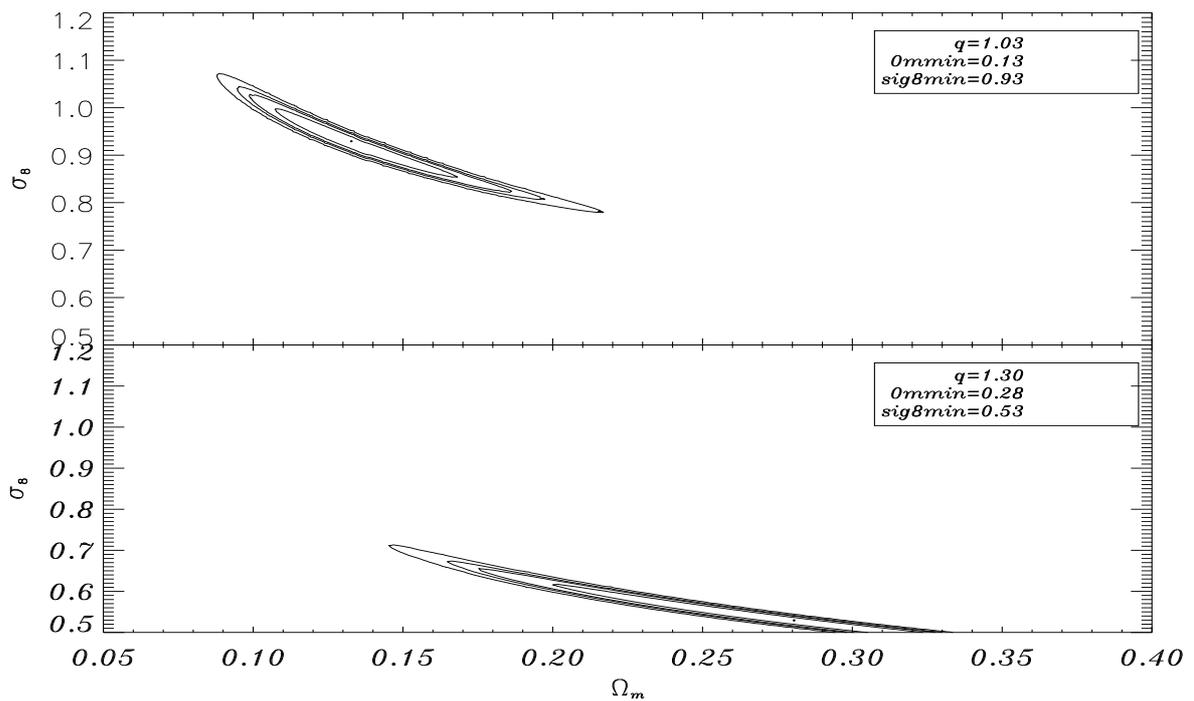


Figura 5.6: O intervalo $[1 < q < 3]$. Fixamos q e realizamos um teste χ^2 no plano $\Omega_m - \sigma_8$. Fixamos dois valores diferentes de q , um muito próximo do limite do intervalo inferior ($q = 1,03$) e o outro um pouco maior do que o primeiro ($q = 1,30$). Notamos que uma pequena variação em q produz uma imensa variação nos dois parâmetros cosmológicos. Nós fixamos o *intervalo físico de q* nos limites $[1,03 \leq q < 1,30]$.

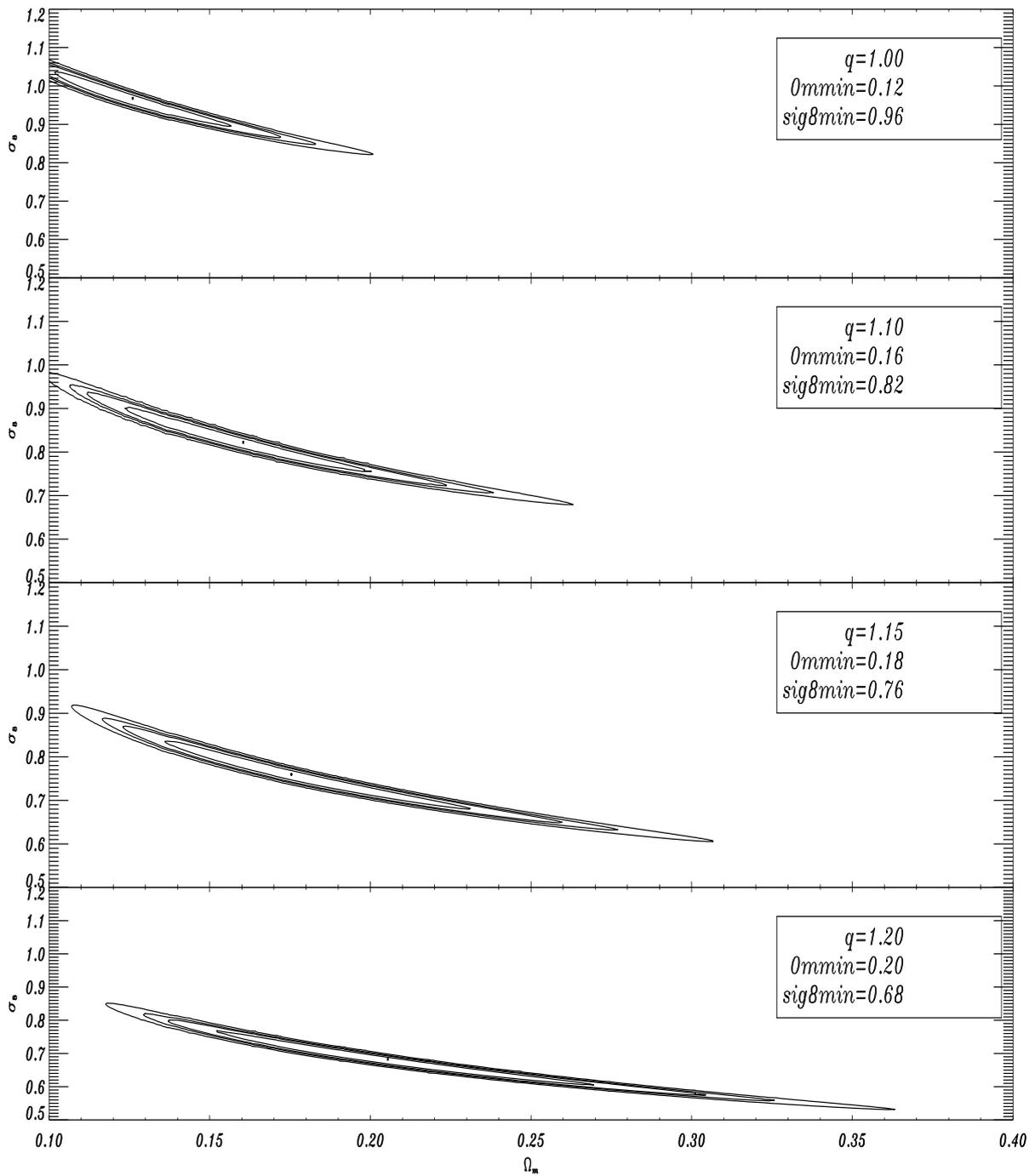


Figura 5.7: No painel superior, vemos os resultados de Reiprich (equivalentes ao nosso método PL quando $q \rightarrow 1$), que mostra um Ω_m muito baixo e um σ_8 alto (comparados com os resultados recentes da RCF). À medida que aumentamos o valor de q , temos maiores Ω_m e menores valores de σ_8 como melhor ajuste, e o painel inferior mostra que podemos ter parâmetros cosmológicos bem de acordo com os atuais dados da RCF, usando os mesmos dados observacionais do catálogo HIFLUGCS, apenas mudando o método PS padrão pela nossa aproximação PL.

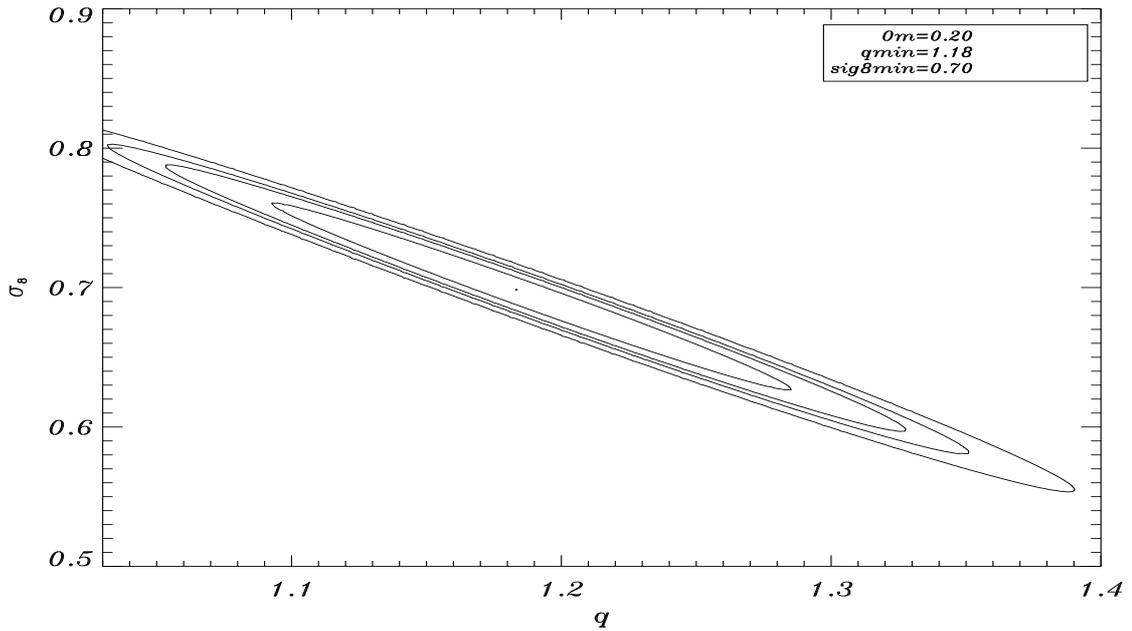


Figura 5.8: Fixamos Ω_m e realizamos um teste χ^2 no plano $q - \sigma_8$; como resultado temos um contorno estatístico transversal e quase plano, mostrando uma clara dependência linear entre q e σ_8 . Veremos o mesmo comportamento no plano $q - \Omega_m$, fixando σ_8 .

Outro exemplo, mostrando como nossa aproximação PL é poderosa para limitar os parâmetros, é dado na figura 5.9; fixamos σ_8 e realizamos um teste χ^2 no plano $q - \Omega_m$. No painel superior, para $\sigma_8 = 0,70$, temos $\Omega_m \sim 0,20$ como melhor ajuste. Quanto mais aumentamos σ_8 , mais diminuimos o valor de Ω_m (painéis do meio e inferior). Apenas $\sigma_8 \leq 0,70$ dá $\Omega_m \geq 0,20$ (o que é um bom valor para ambos os parâmetros, aceito atualmente em medições das massas em óptico e raio-X, e também compatíveis com os dados da RCF).

Quando realizamos um teste χ^2 sobre todos os parâmetros de nosso modelo (q , Ω_m e σ_8), encontramos o melhor ajuste aos dados do HIFLUGCS em $q = 1,1$, $\Omega_m = 0,16$ e $\sigma_8 = 0,82$. Podemos ver o plano $\Omega_m - \sigma_8$ destes parâmetros de melhor ajuste no segundo painel (de cima para baixo) da figura 5.7, e o plano aproximado de $q - \Omega_m$ pode ser visto no painel do meio da figura 5.9.

Na figura 5.9 fixamos $\sigma_8 = 0,70$ e obtemos $\Omega_m = 0,20$ e $q = 0,19$ como parâmetros de melhor ajuste. Apenas para mostrar quão bom é esse ajuste aplicado diretamente aos dados do HIFLUGCS, mostramos a figura 5.10. Os triângulos mostram a função de massa em

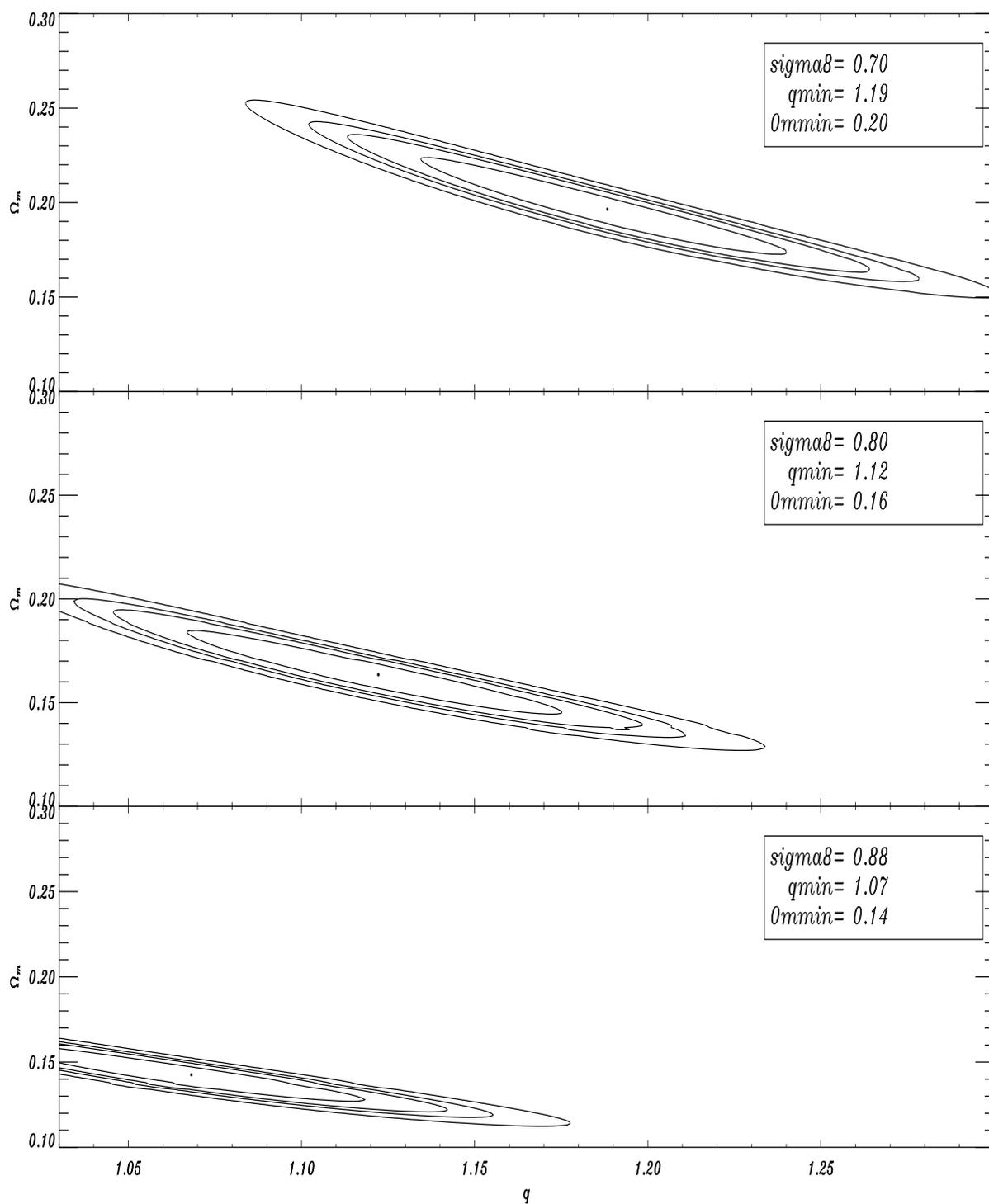


Figura 5.9: Outro exemplo mostrando como a distribuição PL limita os parâmetros cosmológicos. Fixamos σ_8 e realizamos um teste χ^2 no plano $q - \Omega_m$. No painel superior, para $\sigma_8 = 0,70$, temos $\Omega_m \sim 0,20$ como melhor ajuste. Quanto mais aumentamos σ_8 , mais diminuimos Ω_m (painéis do meio e inferior).

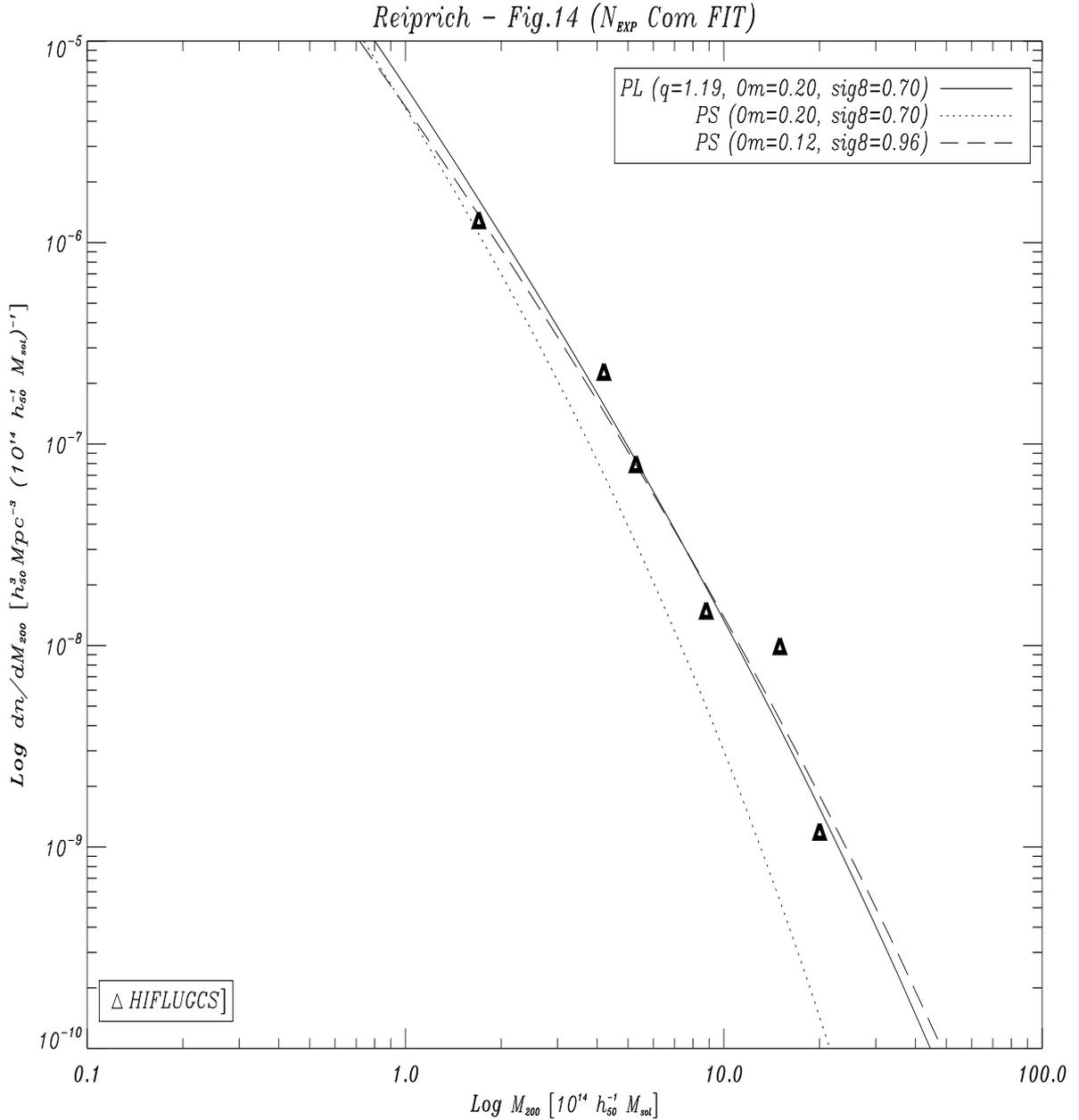


Figura 5.10: Os triângulos representam a função de massa observada em raio-X , binada, do catálogo HIFLUGCS, e as linhas são os modelos teóricos da função de massa (todos eles usando o catálogo HIFLUGCS como pontos, após um procedimento padrão de ajuste). A linha de tracejado longo é o resultado de Reiprich: o método PS com $\Omega_m = 0,12$ e $\sigma_8 = 0,96$ (o primeiro parâmetro é baixo demais e o segundo é alto, em relação às recentes medidas do WMAP). A linha sólida é o nosso método PL com $\sigma_8 = 0,70$ e $\Omega_m = 0,20$ (parâmetros de acordo com os dados recentes da RCF). A linha pontilhada é a aproximação de PS com os mesmos parâmetros do nosso método PL (vemos claramente a falta de ajuste aos dados observacionais).

raio-X observacional binada do catálogo HIFLUGCS, e as linhas são os modelos teóricos da função de massa (todos eles usando os dados do HIFLUGCS como pontos, e realizando sobre tais pontos um procedimento de ajuste). A linha sólida é o nosso método PL com os parâmetros de melhor ajuste citados acima. A linha de tracejados longos mostra o procedimento de Reiprich usando a aproximação de PS com $\Omega_m = 0,12$ e $\sigma_8 = 0,96$ (que se ajustam bem aos dados do HIFLUGCS mas, como já dissemos, são parâmetros incompatíveis com os dados mais atuais da RCF, fornecidos pelo WMAP). Apenas como curiosidade, apresentamos na linha pontilhada o procedimento de Reiprich (com a aproximação de PS), mas usando agora os melhores parâmetros cosmológicos obtidos com o nosso método PL (comparando com os triângulos notamos claramente o desajuste da aproximação de PS em relação ao HIFLUGCS, usando parâmetros cosmológicos dentro dos limites dos dados do WMAP). Vemos facilmente nesta figura como nosso método PL é flexível, em relação ao PS.

5.8.3 Energia Escura e Formação de Estruturas

Análises da relação distância-*redshift*, usando supernovas do tipo Ia em altos *redshifts*, levaram à descoberta de que a expansão do universo está atualmente acelerando. Isso sugere que a contribuição dominante para o balanço energético do universo, na atualidade, é dada por um componente de equação de estado $w < -1/3$, chamado “energia escura”. O modelo que melhor explica os dados atuais, combinando medidas das flutuações da RCF com medidas dos atuais aglomerados galácticos, é o de um universo plano com $\Omega_M \simeq 0,3$, com a contribuição restante para a densidade crítica fornecida pela energia escura.

A natureza da energia escura é fonte de muitos debates. Talvez o candidato mais direto seja uma constante cosmológica positiva Λ , com parâmetro de equação de estado $w = -1$. Essa visão simples é um caso especial de uma classe de modelos mais abrangente, onde a energia escura seria a manifestação de um campo escalar rolando lentamente no seu potencial. No limite de um potencial completamente plano, estes modelos levariam à $w = -1$ [55].

Se a equação de estado da energia escura varia apenas lentamente com o tempo, então predições observacionais seriam bem aproximadas tratando-se $w(a) = w$ como uma constante[48].

A equação de estado para a energia escura não define unicamente o comportamento desta componente, em especial se considerarmos a formação de estruturas no universo. A formação de estruturas é dependente da velocidade do som da energia escura, que limita suas propriedades de aglomeração. No formalismo original da quintessência[49, 50], a componente da energia escura é extremamente relativística, o que significa que ela pode se aglomerar nas escalas mais altas, mas não nas escalas mais baixas dos aglomerados de galáxias ou menores.

Conseqüentemente, a energia escura apenas afeta o espectro de potências da matéria e as anisotropias da RCF em muito grande escala. Para o caso especial de uma constante cosmológica, $w = -1$, a aglomeração da energia escura não é perceptível, pois a densidade de energia nas perturbações sempre permanece em níveis baixos (de fundo). Obviamente, para $w \neq -1$, as propriedades da aglomeração da energia escura afetam fortemente a formação de estruturas no universo; em particular, para perturbações esféricas, a taxa de crescimento linear, a densidade crítica para o colapso, e detalhes do comportamento subsequente e da virialização, são todos dependentes desta propriedade. Nesta seção seguimos a maioria da literatura corrente e apenas consideramos um componente não-aglomerativo de energia escura. Contudo, notamos que modelos nos quais a energia escura se aglomera em pequenas escalas estão sendo discutidos com frequência cada vez maior[171, 172].

Para as variáveis usadas nesta seção, se nenhuma dependência for mencionada para uma dada quantidade (e.g. Ω_M), deveremos assumir que esta é calculada no presente. Se de outro modo uma dependência explícita é dada (e.g. $\Omega_M(a)$), assumimos que a quantidade varia com a época. Adicionalmente assumimos que $w(a) = w$ é constante no decorrer do tempo.

A energia escura tem uma equação de estado relacionando a pressão p_X e densidade ρ_X tal que $p_X = w(a)\rho_X$. para um $w(a)$ geral, a expansão dinâmica do universo é dada pela equação de Friedmann

$$E^2(a) = \frac{H^2(a)}{H_0^2} = \Omega_M a^{-3} + \Omega_K a^{-2} + \Omega_X a^{f(a)}, \quad (5.27)$$

onde $\Omega_K \equiv (1 - \Omega_M - \Omega_X)$ é a constante de curvatura, $H(a) \equiv \dot{a}/a$ é o parâmetro de Hubble com o presente valor de H_0 . $f(a)$ é achada resolvendo a equação de conservação

de energia para a energia escura $d(\rho_X a^3)/da = -3p_X a^2$ (Ref.[50]), dando $\rho_X \propto a^{f(a)}$, onde

$$f(a) = \frac{-3}{\ln a} \int_0^{\ln a} [1 + w(a')] d \ln a'. \quad (5.28)$$

Para w constante, $f(a) = -3(1 + w)$. A evolução da densidade de matéria $\Omega_M(a)$ e da densidade de energia escura $\Omega_X(a)$ é dada por

$$\Omega_M(a) = \frac{\Omega_M a^{-3}}{E^2(a)}, \quad \Omega_X(a) = \frac{\Omega_X a^{f(a)}}{E^2(a)}. \quad (5.29)$$

Considerando o comportamento das perturbações homogêneas esféricas, derivamos os mais simples modelos para a formação de estruturas no universo. O comportamento de uma esfera homogênea de densidade uniforme pode ser modelado usando as mesmas equações discutidas até agora. Uma das importantes aplicações do modelo de perturbação esférica é a derivação da taxa de crescimento linear (*linear growth rate*): consideramos duas esferas contendo quantidades iguais de material, uma de material de fundo com raio a , e uma de raio a_p com uma mudança homogênea na densidade. Daqui em diante quantidades com um índice p referem-se à perturbação, enquanto quantidades sem índice relacionam-se ao fundo. As densidades dentro das esferas são relacionadas aos seus raios, de modo que

$$\rho_p a_p^3 = \rho a^3, \quad \delta \equiv \rho_p / \rho - 1, \quad (5.30)$$

onde δ é o contraste de densidade. Para a primeira ordem em δ ,

$$a_p = a(1 - \delta/3). \quad (5.31)$$

A equação cosmológica para a perturbação esférica e o fundo será[173]

$$\frac{1}{a} \frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{H_0^2}{2} \left[\Omega_M a^{-3} + [1 + 3w(a)] \Omega_X a^{f(a)} \right], \quad (5.32)$$

onde a deve ser substituído por a_p no termo da densidade de matéria para a perturbação. A densidade de energia escura $\rho_X \propto a^{f(a)}$ é a mesma tanto para a perturbação quanto para o fundo se a energia escura não se aglomerar. Portanto, substituindo as Eqs. (5.30) e (5.31) em (5.32), para primeira ordem em δ , temos:

$$\frac{3}{2} \Omega_M H_0^2 a^{-3} \delta = \frac{d^2 \delta}{dt^2} + \frac{2}{a} \frac{da}{dt} \frac{d\delta}{dt}. \quad (5.33)$$

Mudando as variáveis de t para a segue que

$$\frac{3}{2} \Omega_M a^{-3} \delta = \frac{d^2 \delta}{da^2} E^2(a) a^2 + \frac{d\delta}{da} \left\{ 2a E^2(a) \right.$$

$$-\frac{a}{2} \left[\Omega_M a^{-3} + [3w(a) + 1] \Omega_X a^{f(a)} \right] \}, \quad (5.34)$$

que pode ser simplificada para dar

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \Omega_M(a) &= \frac{d^2 \ln \delta}{d \ln a^2} + \left(\frac{d \ln \delta}{d \ln a} \right)^2 + \frac{d \ln \delta}{d \ln a} \left\{ 1 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} [\Omega_M(a) + [3w(a) + 1] \Omega_X(a)] \right\}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Essa é a generalização da equação B7 na Ref.[174] para cosmologias não-planas, e é válida para qualquer $w(a)$.

A Eq. (5.35) pode ser facilmente resolvida por integração numérica. Para cosmologias com a constante cosmológica Λ , a solução do modo de crescimento para essa equação é dada por[95]

$$D(a) = \frac{5\Omega_M}{2} E(a) \int_0^a \frac{da'}{[a' E(a')]^3}, \quad (5.36)$$

onde $E(a)$ está definido na Eq. (5.27). Embora essa integral possa ser facilmente resolvida numericamente, é comum usarmos a aproximação de Carrol *et al.*[37],

$$\begin{aligned} D(a) &\simeq \frac{5\Omega_M(a)a}{2} \left[\Omega_M(a)^{4/7} - \Omega_\Lambda(a) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{\Omega_M(a)}{2} \right) \left(1 + \frac{\Omega_\Lambda(a)}{70} \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Uma solução geral para o modo de crescimento em cosmologias com energia escura, equivalente à Eq. (5.36), ainda está para ser encontrada. Contudo, para modelos cosmológicos planos, com w constante, a solução pode ser escrita em termos da função hipergeométrica ${}_2F_1$ [175]

$$D(a) = a {}_2F_1 \left[-\frac{1}{3w}, \frac{w-1}{2w}, 1 - \frac{5}{6w}, -a^{-3w} \frac{1 - \Omega_M}{\Omega_M} \right]. \quad (5.38)$$

Escrevendo o índice de crescimento como

$$\frac{d \ln \delta}{d \ln a} = \Omega_M^\alpha(a), \quad (5.39)$$

Wang e Steinhardt[174] usaram a Eq. (5.35) para o caso especial de cosmologias planas e acharam

$$\begin{aligned} \alpha &\simeq \frac{3}{5 - w/(1-w)} \\ &+ \frac{3}{125} \frac{(1-w)(1-3w/2)}{(1-6w/5)^3} [1 - \Omega_M(a)]. \end{aligned} \quad (5.40)$$

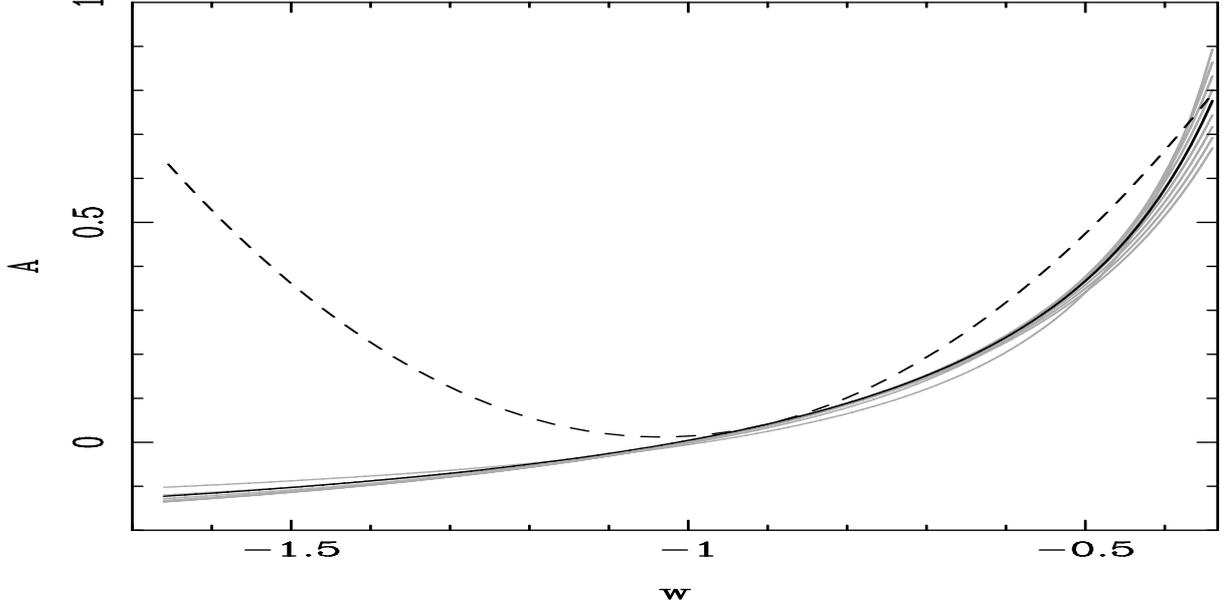


Figura 5.11: Gráfico mostrando o valor real de A na equação (5.41) como uma função de w para 9 cosmologias planas com Ω_M espalhado entre 0,1 e 0,9 (linhas cinza). Para comparação plotamos a fórmula de ajuste de Basilakos[176] (linha tracejada) e a equação (5.42) (linha preta).

Isso levou Basilakos[176] a estender a aproximação de Carrol *et al.*[37] dada pela Eq. (5.37) para o caso de $w \neq -1$:

$$D(a) \simeq \frac{5\Omega_M(a)a}{2} [\Omega_M(a)^\alpha - \Omega_X(a) + \left(1 + \frac{\Omega_M(a)}{2}\right) (1 + A\Omega_X(a))]^{-1}, \quad (5.41)$$

com α dado pela Eq. (5.40), e $A \simeq 1,742 + 3,343w + 1,615w^2$. Na Fig. 5.11 plotamos os valores de A requeridos para baterem com a Eq. (5.41) para o fator real de crescimento linear (dado pela Eq. (5.38)), para modelos cosmológicos planos com $0,1 < \Omega_M < 0,9$ como uma função de w (linhas cinza). O ajuste de Basilakos[176] é mostrado pela linha tracejada. Esse é um ajuste pobre para $w < -1$, e por causa disso Percival[173] propôs

$$A = \frac{-0,28}{w + 0,08} - 0,3, \quad (5.42)$$

mostrado pela linha preta na Fig. 5.11.

A Eq. (5.42) foi determinada pelo ajuste para modelos cosmológicos planos com $0,1 < \Omega_M < 0,9$. Para modelos não-planos, a aproximação da Eq. (5.41) permanece

um bom ajuste. A fórmula de ajuste falha para $\Omega_M \ll 0, 1$, mas para $\Omega_M > 0, 1$, o erro máximo (com $0 < \Omega_X < 1$) é de 3,8% para $w = -4/3$, 2,6% para $w = -1$ e 5,1% para $w = -2/3$. Para comparação, a fórmula de ajuste de Carrol *et al.*[37] dada pela Eq. (5.37) é acurada em 2,1% para $w = -1$ sobre esse intervalo de Ω_M .

Vamos agora mostrar a densidade crítica para o colapso de perturbações esféricas homogêneas no presente, em um fundo homogêneo de energia escura. O método adotado é um desenvolvimento do usado na Ref.[177], onde foi calculada a densidade crítica em cosmologias Λ . Esquemas de soluções para uma cosmologia Einstein-de Sitter, para cosmologias abertas e para cosmologias planas com Λ , foram sintetizadas na Ref.[162].

Consideramos novamente duas esferas contendo iguais quantidades de material: uma de material de fundo com raio a , e uma de raio a_p com uma mudança homogênea na densidade.

Se $\Omega_\Lambda = 0$, para uma cosmologia Einstein-de Sitter a densidade crítica para colapso, no presente, se reduz a

$$\delta_{\text{EdS}} \equiv \frac{3}{20}(12\pi)^{2/3} \simeq 1,686, \quad (5.43)$$

que foi primeiramente derivada por [178].

A evolução da densidade crítica para colapso $\delta_c(a)$, é usualmente definida como segue: para um modelo cosmológico com parâmetros Ω_M e Ω_X , $\delta_c(a)$ dá a densidade para uma perturbação que colapsa no fator de escala a , normalizada para a época presente. Por exemplo, se temos um campo de densidade (e um espectro de potências associado) normalizado no presente, então $\delta_c(a)$ (onde a não é necessariamente igual a 1) se relaciona às perturbações esféricas neste campo de densidade que colapsam no fator de escala a . δ_c é o caso particular para perturbações que colapsam no presente: perturbações que colapsam mais cedo obviamente tem que ser significativamente mais densas.

A fraca evolução da densidade crítica, como uma função do modelo cosmológico, permite que o fator de crescimento linear seja usado para aproximar $\delta_c(a)$: Se δ_c é constante ao longo de um percurso cosmológico particular, então a evolução de $\delta_c(a)$ é dada apenas por $D(a)^{-1}$ (Ref.[173]). A única mudança em $\delta_c(a)$ entre dois tempos de colapso é causada pela mudança na normalização geral do campo. A escolha mais óbvia de normalização é δ_{EdS} , assim a aproximação será correta no limite $a \rightarrow 0$, dado[173]

$$\delta_c(a) \simeq \frac{D_0}{D(a)}\delta_{\text{EdS}}. \quad (5.44)$$

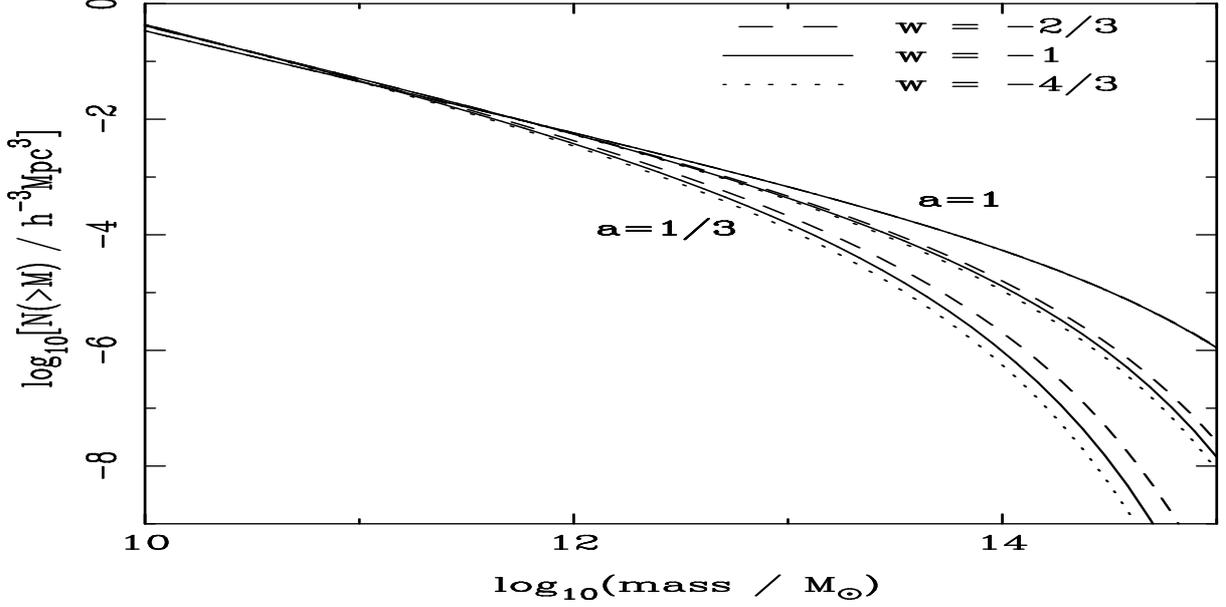


Figura 5.12: Gráfico mostrando a função de massa predita pela fórmula de ajuste de Sheth & Tormen[144] calculada para $\Omega_M = 0,3$, $\Omega_X = 0,7$ para três valores diferentes de w , e para três épocas correspondentes a $a = 1/3, 1/2, 1$. Como o espectro de potências é normalizado no presente, e δ_c é apenas fracamente dependente da cosmologia, então existe pouca diferença entre as funções de massa preditas para $a = 1$. À medida que recuamos no tempo a diferença se torna maior por causa dos diferentes fatores de crescimento linear.

O erro no uso da densidade crítica de Einstein-de Sitter é da mesma ordem que o erro na aproximação da fórmula de ajuste da Eq. (5.41).

Ma *et al.*[179] consideram o efeito da quintessência na função de transferência da massa. Eles forneceram fórmulas de ajuste para a razão entre as cosmologias de quintessência e as cosmologias com Λ . Contudo, se a energia escura se aglomera apenas em muito grande escala, a função de transferência é alterada apenas nessas escalas. Se o espectro de potências é normalizado para σ_8 (a flutuação de densidade quadrática média em escalas de $8 h \text{ Mpc}^{-1}$), então as escalas usualmente de interesse não são afetadas[180].

Para demonstrar o efeito da equação de estado da energia escura na função de massa, Percival[173] plotou a função de massa cumulativa $N(> M)$, calculada usando o ajuste numérico de Sheth & Tormen[144] para 3 diferentes cosmologias e 3 diferentes épocas na Fig. 5.12. A densidade crítica para colapso para $w = -2/3, -1$ e $-4/3$ e $\Omega_X = 0,7$ foi então calculada para $a = 1/3, 1/2, 1$, correspondendo a *redshifts* $z = 2, 1, 0$. Como

esperado, porque a densidade crítica para colapso é apenas fracamente dependente dos parâmetros cosmológicos, em $a = 1$ (a época onde o espectro de potências é normalizado) vemos muito pouca diferença nas funções de massa previstas para diferentes cosmologias. Se a normalização do espectro de potências for estabelecida em uma época diferente (por exemplo, pelas flutuações da RCF), então isso não seria correto. A evolução da função de massa é fortemente dependente de w por causa do efeito na evolução de $\delta_c(a)$ através do fator de crescimento linear. Conseqüentemente, determinar a função de massa para *redshifts* outros do que aqueles usados para normalizar o espectro de potências oferece uma forte possibilidade de medirmos $w(a)$.

Esperamos estudar a energia escura na formação de estruturas aplicando dados observacionais no processo. Usaremos então o mesmo formalismo de PS aplicado aos dados de raio-X do catálogo HIFLUGCS já apresentado na seção 5.8.1, mas com a evolução da densidade crítica dada pela Eq. (5.44), assim acrescentando o efeito da energia escura dentro da aproximação de PS. Resumimos nossos resultados na Fig. 5.13.

Um de nossos objetivos em futuro bem próximo é estabelecer uma significativa e detalhada análise da energia escura no processo de formação de estruturas, usando a Eq. (5.44) para a evolução da densidade crítica, e aplicarmos então nosso método PL aos dados do HIFLUGCS, como mostrado na seção 5.8.2. O problema intrínseco deste procedimento é o alto número de parâmetros livres, como o w na equação de estado da energia escura, e o parâmetro q de nossa distribuição PL. Mas um estudo detalhado e comparativo poderia sem dúvida quebrar as possíveis degenerescências nos parâmetros cosmológicos.

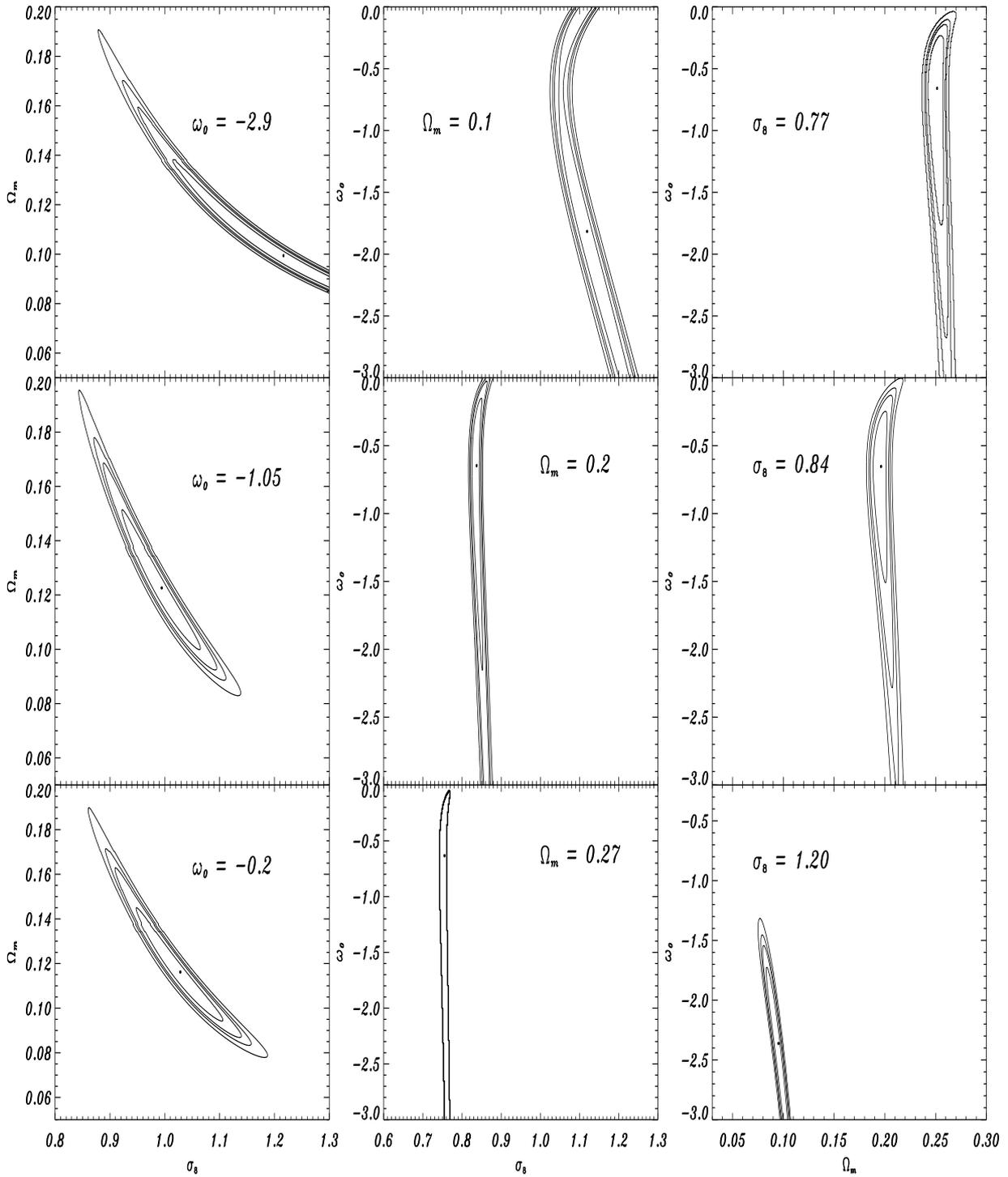


Figura 5.13: Usamos o formalismo de PS com os dados de raio-X do catálogo HIFLUGCS, presentes na seção 5.8.1, mas com a evolução da densidade crítica dada pela equação (5.44), de modo a acrescentarmos o efeito da energia escura dentro da aproximação de PS.

Capítulo 6

EFEITOS NÃO-GAUSSIANOS EM PLASMAS ASTROFÍSICOS

6.1 Introdução

Aglomerados de galáxias são os sistemas ligados mais massivos do universo. Eles são fontes luminosas de raio-X, com luminosidade de raio-X no intervalo de $10^{43} - 10^{46} \text{ erg s}^{-1}$, e tamanho típico entre 1 – 3 Mpc. Por essas razões, tais sistemas são amostras naturais do universo, representando bem propriedades como a massa e a fração de bárions do universo[3, 206, 182]. O grande volume de espaço entre as galáxias, nos aglomerados, é preenchido com um plasma difuso e quente, com temperaturas típicas entre $T \sim 10^7 - 10^8$ K. A emissão de raio-X do gás do meio interaglomerado é causada principalmente por Bremsstrahlung (radiação livre-livre).

Atualmente, é praticamente impossível ajustar o espectro de raios-X provenientes dos aglomerados de galáxias utilizando modelos de puro Bremsstrahlung térmico. Com temperaturas acima de 20 KeV , o espectro de raio-X mostra um excesso, na cauda, que não é fornecido pelo Bremsstrahlung térmico (isto ocorre nos aglomerados de Coma, Abell 2199 e outros), mas que é bem ajustado por um espectro de lei de potências, o que levou à diversas investigações de alternativas para os modelos do espectro de raio-X[183, 184, 185]. Contudo, as razões físicas dessas caudas observacionais nos espectros permanecem em aberto, e de fato constituem um grande mistério[186, 187].

Vários mecanismos de Bremsstrahlung não-térmico, nos aglomerados de galáxias,

foram estudados: Liang e colaboradores[188] propuseram que os elétrons relativísticos emissores sincrotônicos são acelerados *in situ* na vasta piscina de elétrons térmicos, produzindo uma população de elétrons supratérmicos responsáveis pelo excesso da emissão em raio-X através do Bremsstrahlung; Timokhin *et al.*[189] sugeriu um novo modelo assumindo que o excesso “não-térmico” é devido à radiação sincrotônica de elétrons ultra-relativísticos (multi-*TeV*) de origem “fotônica”; Dogiel[190] mostrou que, no caso da aceleração *in-situ* de partículas na piscina térmica, os raios-X no intervalo das observações do Beppo-SAX (30 – 80keV) são gerados pela radiação de Bremsstrahlung das partículas térmicas com o espectro Maxwelliano distorcido pela aceleração; Enßlin *et al.*[186] acredita que sua origem poderia ser devido a uma emissão de efeito Compton inverso por elétrons relativísticos.

Nosso objetivo é estender o tratamento da emissão por Bremsstrahlung para um gás Maxwelliano não extensivo (ou seja, um gás que obedece a uma distribuição de velocidades não extensiva, que já vimos ser uma generalização da Maxwelliana padrão) e daí derivar as expressões em termos de funções algébricas simples, que esperamos serão muito úteis para um melhor ajuste dos dados observacionais atuais de raio-X, nos aglomerados de galáxias.

6.2 Bremsstrahlung Térmico

6.2.1 A Emissão Térmica de Bremsstrahlung: O Cálculo Padrão

A radiação devido à aceleração de uma carga no campo Coulombiano de outra carga, é chamada de emissão Bremsstrahlung. As fórmulas clássicas derivadas para explicar tal emissão devem ser extendidas através de uma correção quântica, conhecida como *fatores de Gaunt* (g_{ff}), para uma compreensão completa do processo. Nós tratamos do Bremsstrahlung não relativístico, de tal forma que a emissão total, por unidade de tempo por unidade de volume por unidade de frequência, será dada pela equação abaixo:

$$\frac{dW}{dV dtd\omega} = \frac{16\pi e^6}{3\sqrt{3}c^3 m^2 v} n_e n_i Z^2 g_{ff}(v, \omega), \quad (6.1)$$

onde n_e e n_i são as densidades de elétrons e íons (respectivamente), m e e são a massa de repouso do elétron e seu módulo de carga, Ze define a carga do íon, e v e c são a

velocidade do elétron e a da luz, respectivamente.

Para derivar as fórmulas térmicas de Bremsstrahlung nós tiramos a média da velocidade do elétron na Eq. (6.1) sobre uma distribuição térmica das velocidades. A probabilidade dP de que uma partícula tenha velocidade no intervalo dv^3 é usualmente calculada com a distribuição Maxwelliana[191]

$$dP \propto \exp\left(\frac{-E}{kT}\right) dv^3 = \exp\left(\frac{-mv^2}{2kT}\right) dv^3. \quad (6.2)$$

Considerando uma distribuição isotrópica de velocidades ($dv^3 = 4\pi v^2 dv$), a probabilidade de que uma partícula apresente uma velocidade no intervalo dv é

$$dP \propto v^2 \exp\left(\frac{-mv^2}{2kT}\right) dv, \quad (6.3)$$

e uma vez que a velocidade do elétron incidente deve ser grande o suficiente para pelo menos um fóton de energia $h\nu$ ser criado ($v_{\min} = \left[\frac{2h\nu}{m}\right]^{1/2}$), o Bremsstrahlung térmico terá a forma abaixo:

$$\frac{dW(T, \omega)}{dV dt d\omega} = \frac{\int_{v_{\min}}^{\infty} \left(\frac{dW_{(v, \omega)}}{dV dt d\omega}\right) v^2 \exp\left(\frac{-mv^2}{2kT}\right) dv}{\int_0^{\infty} v^2 \exp\left(\frac{-mv^2}{2kT}\right) dv}. \quad (6.4)$$

Usando $\omega = 2\pi\nu$, o resultado da expressão acima fica na seguinte forma:

$$\frac{dW(T, \nu)}{dV dt d\nu} = \left[\frac{2^5 \pi e^6}{3mc^3} \left(\frac{2\pi}{3km}\right)^{\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{2}} Z^2 n_e n_i \right] \cdot \exp\left(\frac{-h\nu}{kT}\right) \cdot \langle g_{ff} \rangle, \quad (6.5)$$

onde o fator de Gaunt médio $\langle g_{ff} \rangle$ é

$$\langle g_{ff} \rangle = \int_{E=h\nu}^{\infty} g_{ff}(E, \nu) \exp\left(\frac{-[E - h\nu]}{kT}\right) \frac{dE}{kT}. \quad (6.6)$$

Usando a relação $E' = E - h\nu$, conseguimos uma expressão de integração mais fácil para $\langle g_{ff} \rangle$:

$$\langle g_{ff} \rangle = \int_{E'=0}^{\infty} g_{ff}(E'+h\nu, \nu) \exp\left(\frac{-E'}{kT}\right) \frac{dE'}{kT}. \quad (6.7)$$

Para simplificar, consideraremos a partir de agora a quantidade

$$L = \left[\frac{2^5 \pi e^6}{3mc^3} \left(\frac{2\pi}{3km}\right)^{\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{2}} Z^2 n_e n_i \right]. \quad (6.8)$$

6.2.2 A Emissão Térmica de Bremsstrahlung Não Extensiva

Como dissemos antes, há muitos problemas para ajustarmos os dados observacionais atuais da emissão de Bremsstrahlung se considerarmos apenas a fórmula de Bremsstrahlung térmico Maxwelliano da Eq. (6.5). Também vimos que muitos modelos de espectros não-térmicos foram propostos para ajustar esses dados. Discutiremos agora uma nova proposta para ajustar os dados observacionais, na emissão térmica pura de Bremsstrahlung, com base na distribuição não extensiva de Tsallis ao invés da Maxwelliana. Mas para compararmos essas duas distribuições, devemos primeiro derivar o novo conjunto de fórmulas obtidas no caso não extensivo.

Assim, considerando uma distribuição isotrópica de velocidades, a probabilidade de que uma partícula apresente uma velocidade no intervalo dv é dada por:

$$(dP)_{PL} \propto v^2 \left[1 - (1 - q) \frac{mv^2}{2kT} \right]^{\frac{1}{(1-q)}} dv.$$

Considerando a distribuição não extensiva de Tsallis acima, podemos derivar uma expressão para o Bremsstrahlung térmico:

$$\left(\frac{dW(T, \omega)}{dV dt d\omega} \right)_{PL} = \frac{\int_{v_{\min}}^{\alpha} \left(\frac{dW_{(v, \omega)}}{dV dt d\omega} \right) v^2 \left[1 - (1 - q) \frac{mv^2}{2kT} \right]^{\frac{1}{(1-q)}} dv}{\int_0^{\alpha} v^2 \left[1 - (1 - q) \frac{mv^2}{2kT} \right]^{\frac{1}{(1-q)}} dv}, \quad (6.9)$$

onde $v_{\min} = \sqrt{\frac{2h\nu}{m}}$, e o índice “PL” significa distribuição de lei de potências (*Power Law*).

A distribuição não extensiva apresenta uma particularidade: o limite de integração superior α da equação (6.9) tende a ∞ quando o parâmetro livre q é maior do que 1 ($\alpha \rightarrow \infty$ quando $q > 1$); mas α também apresenta um ponto de corte no intervalo $\left[\frac{1}{3} < q < 1 \right]$, onde a quantidade $(1 - q) \frac{mv^2}{2kT}$ é igual à unidade, ou seja, quando $\alpha = v_{cut-off} = \sqrt{\frac{2kT}{m(1-q)}}$.

Resolvendo a equação (6.9) e usando $\omega = 2\pi\nu$, teremos

$$\left(\frac{dW(T, \nu)}{dV dt d\nu} \right)_{PL} = L \cdot F_{(q)} \cdot \left[1 - (1 - q) \frac{h\nu}{kT} \right]^{\frac{1}{(1-q)}+1} \cdot \langle g_{ff} \rangle_{PL}, \quad (6.10)$$

onde L é o mesmo da equação (6.8); $F_{(q)}$ é uma função do parâmetro livre q tal que

$$F_q = \begin{cases} \left(\frac{1}{4} \right) (1 - q)^{\frac{1}{2}} (5 - 3q) (3 - q) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{1-q} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right)} & \text{if } 1/3 < q \leq 1, \\ (q - 1)^{\frac{3}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \frac{3}{2}\right)} & \text{if } q \geq 1, \end{cases} \quad (6.11)$$

e o fator de Gaunt médio $\langle g_{ff} \rangle_{PL}$ é

$$\langle g_{ff} \rangle_{PL} = \int_0^\gamma g_{ff} \cdot [1 - (1 - q)x]^{1/(1-q)} dx, \quad (6.12)$$

onde o limite de integração superior γ tende a ∞ para $q > 1$ e tem um ponto de corte quando $\gamma = \frac{1}{(1-q)}$ no intervalo $[-1 < q < 1]$. Para $q > 1$, existe ainda um limite analítico de validade matemática das fórmulas quando $q = \frac{5}{3}$ ($\sim 1,7$), de tal forma que devemos considerar o tratamento analítico válido apenas no segmento $[\frac{1}{3} < q < 1,7]$.

Uma característica peculiar da distribuição não extensiva é que, no limite $q \rightarrow 1$, nós recuperamos a função de distribuição de Maxwell. Assim podemos considerar a distribuição de lei de potências vista até agora como uma extensão da teoria Maxwelliana, e o parâmetro q como uma medida da não extensividade do sistema tratado. Assim podemos escrever que

$$\lim_{q \rightarrow 1} \left(\frac{dW(T, \nu)}{dV dt d\nu} \right)_{PL} = \left(\frac{dW(T, \nu)}{dV dt d\nu} \right)_{Maxwellian}. \quad (6.13)$$

6.2.3 Fatores de Gaunt Médios

Apresentamos agora uma derivação de todos os fatores de Gaunt médios para as cinco regiões da Fig. 6.1, retirada das Refs.[191, 192]. Para cada região de interesse nós temos aproximações clássicas ou quânticas que levam a uma fórmula particular de g_{ff} que, calculada dentro das equações (6.6) e (6.12), fornecem os fatores de Gaunt médios Maxwellianos e não extensivos $\langle g_{ff} \rangle$.

1. “*Large-Angle Tail Region*” e “*Large-Angle Region*” ($g_{ff} \simeq 1$):

(a) $\langle g_{ff} \rangle = 1$.

(b) $\langle g_{ff} \rangle_{PL} (q>1 \text{ e } 1/3 < q < 1) = \frac{1}{2-q}$.

2. “*Small-Angle UP Region*” ($g_{ff} = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \left[4 \cdot \frac{\frac{1}{2}mv^2}{h\nu} \right]$):

(a) $\langle g_{ff} \rangle = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \left[\frac{4kT}{h\nu\xi} \right]$.

(b) $\langle g_{ff} \rangle_{PL} (q>1) = \left(\frac{1}{2-q} \right) \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left\{ \ln \left[\frac{4kT}{h\nu\xi} \right] + \ln \left(\frac{1}{q-1} \right) - \Psi \left(\frac{2-q}{q-1} \right) \right\}$.

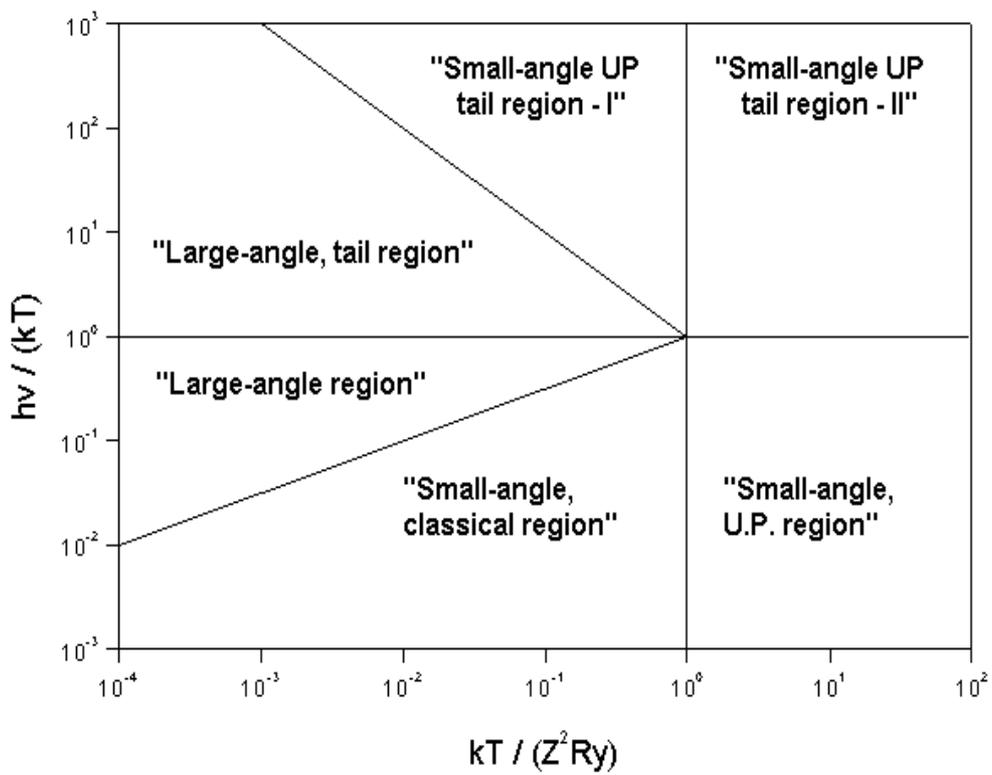


Figura 6.1: Gráfico de Novikov[192, 191], mostrando diferentes regiões para o fator de Gaunt.

$$(c) \langle g_{ff} \rangle_{PL (1/3 < q < 1)} = \left(\frac{1}{2-q} \right) \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left\{ \ln \left[\frac{4kT}{h\nu\xi} \right] + \ln \left(\frac{1}{1-q} \right) - \Psi \left(\frac{3-2q}{1-q} \right) \right\}.$$

$$3. \text{ “Small-Angle Classical Region” } \left(g_{ff} = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \left[\frac{2}{\xi} \left(\frac{\frac{1}{2}mv^2}{h\nu} \right) \left(\frac{\frac{1}{2}mv^2}{Z^2R_y} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right):$$

$$(a) \langle g_{ff} \rangle = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \left[\frac{4}{\xi^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{kT}{h\nu} \right) \left(\frac{kT}{Z^2R_y} \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

$$(b) \langle g_{ff} \rangle_{PL (q > 1)} = \left(\frac{1}{2-q} \right) \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left\{ \ln \left[\frac{4}{\xi^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{kT}{h\nu} \right) \left(\frac{kT}{Z^2R_y} \right)^{\frac{1}{2}} \right] + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{1}{q-1} \right) - \frac{3}{2} \Psi \left(\frac{2-q}{q-1} \right) \right\}.$$

$$(c) \langle g_{ff} \rangle_{PL (1/3 < q < 1)} = \left(\frac{1}{2-q} \right) \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left\{ \ln \left[\frac{4}{\xi^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{kT}{h\nu} \right) \left(\frac{kT}{Z^2R_y} \right)^{\frac{1}{2}} \right] + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{1}{1-q} \right) - \frac{3}{2} \Psi \left(\frac{3-2q}{1-q} \right) \right\}.$$

$$4. \text{ “Small-Angle U.P. Tail Region - I” } \left(g_{ff} = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \left(\frac{v_i+v_f}{v_i-v_f} \right) \right):$$

$$(a) \langle g_{ff} \rangle = \left(\frac{3}{\pi} \frac{kT}{h\nu} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$(b) \langle g_{ff} \rangle_{PL (q > 1)} = \left(\frac{3}{\pi} \frac{kT}{h\nu} \right)^{\frac{1}{2}} (q-1)^{-3/2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}.$$

$$(c) \langle g_{ff} \rangle_{PL (1/3 < q < 1)} = \left(\frac{3}{\pi} \frac{kT}{h\nu} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{4}{(1-q)^{1/2}(5-3q)(3-q)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{1-q} + \frac{1}{2}\right)}.$$

$$5. \text{ “Small-Angle U.P. Tail Region - II” } \left(g_{ff} \sim \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \left[1 - \exp \left(-2\pi \sqrt{\frac{Z^2R_y}{h\nu}} \right) \right] \right):$$

$$(a) \langle g_{ff} \rangle = 2 \left(12 \frac{Z^2R_y}{h\nu} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$(b) \langle g_{ff} \rangle_{PL (q > 1 \text{ e } 1/3 < q < 1)} = 2 \left(12 \frac{Z^2R_y}{h\nu} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(2-q)},$$

onde $\xi = \exp(C)$, C sendo a Constante de Euler[193]:

$$C = - \int_0^{\infty} \ln t \cdot \exp(-t) dt = 0,577\dots, \quad (6.14)$$

$\Psi(x)$ é a função Psi de Euler em x , e a energia de Rydberg $R_y = 13,6 \text{ eV}$ é a unidade de energia.

6.2.4 Análise dos Resultados

Considerando as equações (6.5) e (6.10), e tomando o valor da constante L como na equação (6.8), obteremos equações relacionando o espectro da emissão térmica de Bremsstrahlung com a frequência ν , como segue:

$$\frac{\left(\frac{dW_{(T,\nu)}}{dV dt d\nu}\right)}{L} = \langle g_{ff} \rangle \cdot \exp\left(\frac{-h\nu}{kT}\right) \quad (6.15)$$

$$\frac{\left(\frac{dW_{(T,\nu)}}{dV dt d\nu}\right)_{PL}}{L} = F_{(q)} \cdot \langle g_{ff} \rangle_{PL} \cdot \left[1 - (1 - q) \frac{h\nu}{kT}\right]^{\frac{1}{(1-q)}+1} \quad (6.16)$$

onde $\langle g_{ff} \rangle$ e $\langle g_{ff} \rangle_{PL}$ foram previamente obtidos na seção 6.2.3 para cada região da Fig. 6.1, e $F_{(q)}$ é uma função dependente de q dada pela equação (6.11).

Usando as equações (6.15) e (6.16) plotamos as figuras 6.2, 6.3 e 6.4, de modo a comparar o comportamento das distribuições Maxweliana e não extensiva para o modelo da emissão térmica de Bremsstrahlung.

Na figura 6.2 vemos a emissão térmica de Bremsstrahlung das regiões “*Large-Angle*” e “*Large-Angle Tail*”. A linha sólida apresenta o comportamento da Maxweliana, que é quase constante até $\log\left(\frac{h\nu}{kT}\right) = 1$, região onde tal distribuição se ajusta bem aos dados observacionais; mas para valores maiores ela decai muito rapidamente, e tal comportamento não é comprovado pelos dados observacionais, que ao contrário apresentam um decaimento bastante moderado após $\log\left(\frac{h\nu}{kT}\right) = 1$, de modo a ostentar uma cauda que se estende até valores bastante altos de $\log\left(\frac{h\nu}{kT}\right)$, mostrando altos valores de $\log\left[\left(\frac{dW_{(T,\nu)}}{dV dt d\nu}\right)/L\right]$ onde a Maxweliana há muito já decaiu a zero. É, desse modo, bastante claro que a emissão Maxweliana térmica pura de Bremsstrahlung não é capaz de ajustar-se bem aos atuais dados observacionais. Mas note o comportamento da distribuição não extensiva no mesmo gráfico: os valores de $\log\left[\left(\frac{dW_{(T,\nu)}}{dV dt d\nu}\right)_{PL}/L\right]$ são também constantes até $\log\left(\frac{h\nu}{kT}\right) = 1$ (e aproximadamente os mesmos do caso Maxweliano); assim podemos concluir que, onde a Maxweliana explica bem os dados observacionais, assim será também na distribuição não extensiva. A emissão não extensiva apresenta, contudo, um parâmetro livre q , que tem um papel importante após o limite $\log\left(\frac{h\nu}{kT}\right) = 1$; após esse limite, para $q < 1$, as curvas caem ainda mais rapidamente do que no caso Maxweliano, de tal modo que esses parâmetros apresentam um ajuste ainda pior aos dados observacionais; mas para $q > 1$ as

Thermal Bremsstrahlung Emission (Large-angle region / Large-angle tail region)

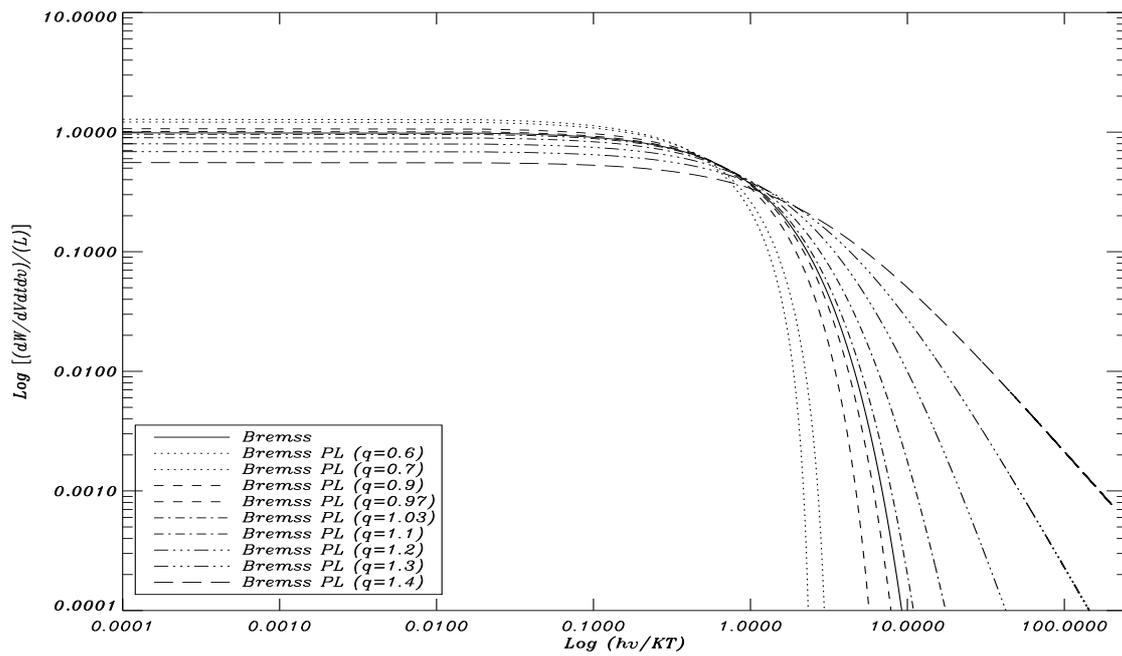


Figura 6.2: Emissão do Bremsstrahlung Térmico das regiões “Large-Angle” e “Large-Angle Tail”. Obtemos a linha sólida usando a distribuição Maxwelliana, e as demais linhas usando nossa distribuição de lei de potências (Power Law - PL) com diferentes valores do parâmetro q . Podemos facilmente observar a flexibilidade do parâmetro livre q após o limite $\log\left(\frac{h\nu}{KT}\right) = 1$.

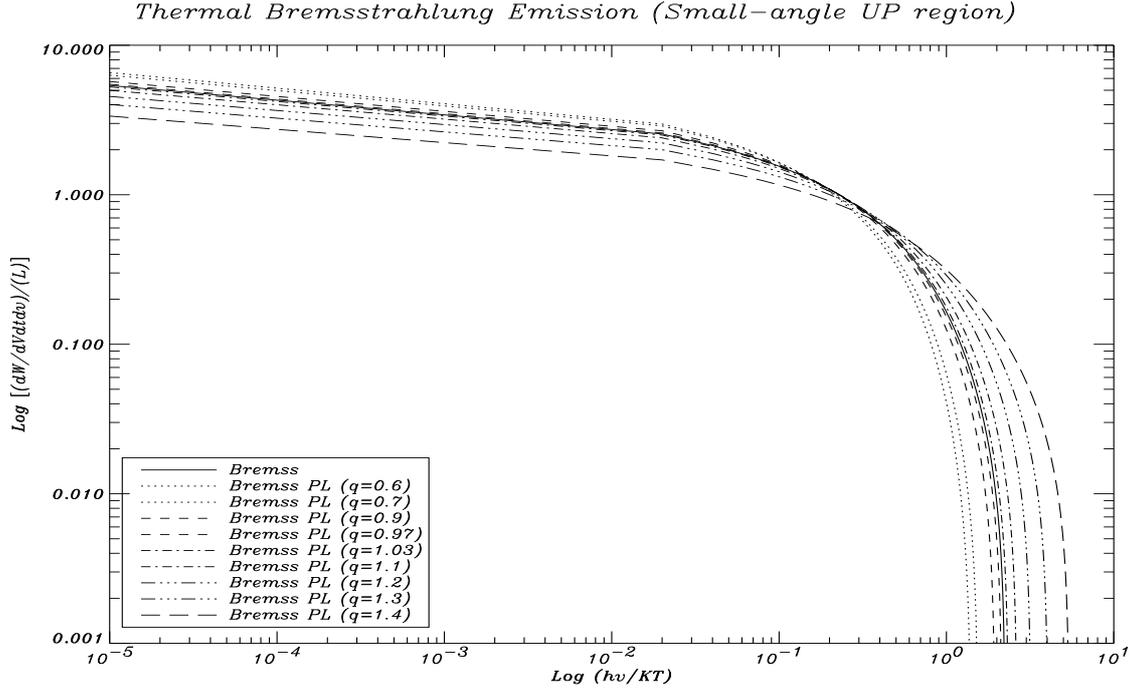


Figura 6.3: Mesma explicação da Fig. 6.2, mas para a região “Small-Angle UP”.

curvas apresentam altos valores de emissão e “caem suavemente” quando comparadas à curva Maxweliana. Assim, no contexto da emissão térmica não extensiva, para os valores de $q > 1$, esperamos melhores ajustes aos dados observacionais atuais, sem a necessidade de assumirmos nenhum tipo de emissão não-térmica e nenhum ajuste não-físico de lei de potência, como até hoje foi proposto.

Na Fig. 6.3 temos o mesmo comportamento que na Fig. 6.2, agora para a região “*Small-Angle UP*”; mas notamos que nesse caso a cauda após $\log\left(\frac{h\nu}{KT}\right) = 1$ não é tão pronunciada como nas regiões “*Large-Angle*” e “*Large-Angle Tail*” da Fig. 6.2. Na Fig. 6.4 apresentamos o comportamento da emissão térmica de Bremsstrahlung na região “*Small-Angle Classical*”, usando a Maxweliana e a distribuição PL, para diferentes valores de $\gamma^2 = \left(\frac{kT}{Z^2 R_y}\right)$ (as curvas são cortadas no limite do tratamento numérico).

Finalmente, na Fig. 6.5 mostramos o comportamento do fator de Gaunt médio na região “*Small-Angle Classical*”, usando apenas a distribuição PL, para diferentes valores do parâmetro q . Cada curva é plotada usando um valor diferente de $\gamma^2 = \left(\frac{kT}{Z^2 R_y}\right)$. Note que no painel inferior esquerdo temos o mesmo comportamento da distribuição Maxweliana, porque a PL recupera a Maxweliana quando q tende a 1. Podemos facilmente ver que nosso método não extensivo apresenta o mesmo comportamento, para o

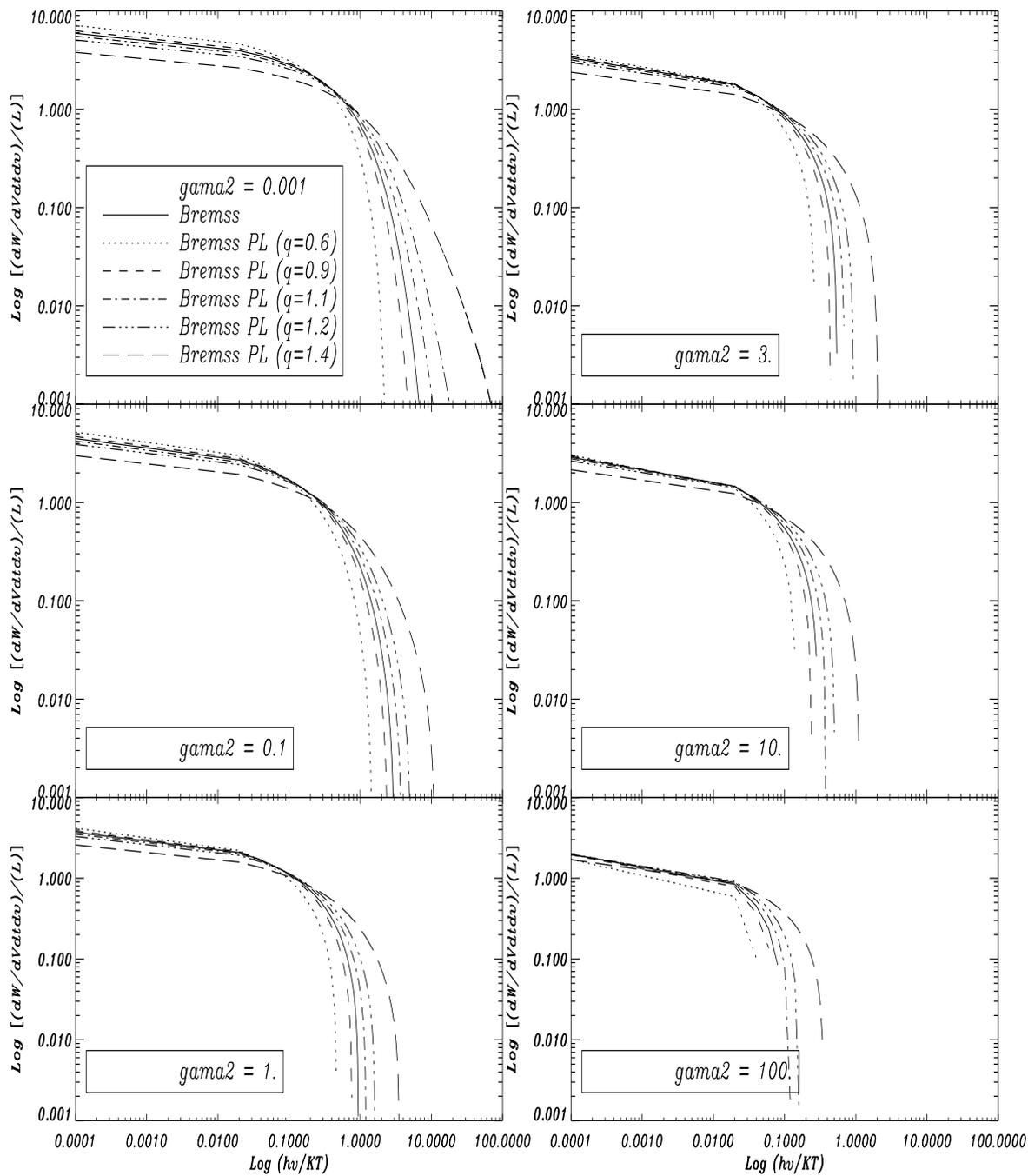


Figura 6.4: O comportamento da emissão do Bremsstrahlung térmico na região “Small-Angle Classical”, usando a Maxwelliana e a nossa distribuição PL, para valores diferentes de $\gamma^2 = \left(\frac{kT}{Z^2 R_y}\right)$.

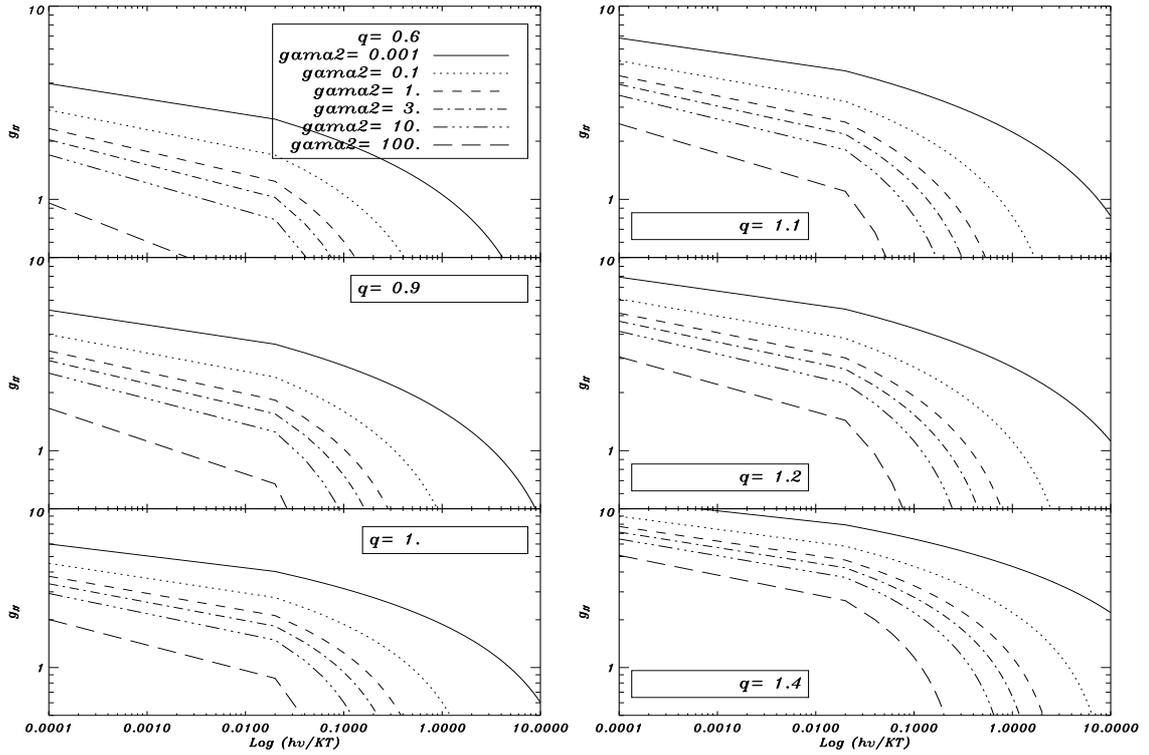


Figura 6.5: O comportamento do fator de Gaunt médio na região “Small-Angle Classical”, usando apenas nossa distribuição PL, para diferentes valores do parâmetro q . Cada curva é construída usando um valor diferente de $\gamma^2 = \left(\frac{kT}{Z^2 R_y}\right)$. Podemos facilmente ver que o método PL apresenta o mesmo comportamento do fator de Gaunt médio que o do método padrão; ou seja, podemos usar em nosso método as mesmas aproximações no fator de Gaunt.

fator de Gaunt médio, que o método padrão; ou seja, podemos usar as mesmas aproximações para o fator de Gaunt que o método padrão usa, visto que são da ordem da unidade, mesmo para uma grande gama de valores do parâmetro q .

Capítulo 7

NOVOS LIMITES COSMOLÓGICOS USANDO ENERGIA ESCURA, FRAÇÃO DE MASSA DO GÁS, E SNe Ia

7.1 Introdução

A constante cosmológica (Λ), a mais antiga e de longe a candidata mais natural a energia escura, atualmente enfrenta algumas dificuldades teóricas, sendo que a mais desafiadora delas é o chamado problema da constante cosmológica: o presente limite cosmológico superior, $\Lambda_o/8\pi G \sim 10^{-47} GeV^4$, difere das expectativas teóricas naturais da teoria quântica dos campos, $\sim 10^{71} GeV^4$, em mais de 100 ordens de magnitude. Na verdade, tal problema tem também inspirado muitos cenários regidos por uma constante variando no tempo, $\Lambda(t)$, ou um vácuo decaindo e variando no tempo com uma equação de estado constante[197].

Entre os candidatos restantes para energia escura, os mais promissores levam a uma equação de estado dependente do tempo, usualmente associada a um componente de campo escalar dinâmico. Tais modelos de quintessência podem também ser representados parametricamente por uma equação de estado em função do *redshift*, $\omega(z)$, como proposto por Cooray & Huterer[198], e também discutido por Linder[199], e, independentemente,

por Padmanabhan & Choudhury[200]. Em princípio, a variação no tempo do parâmetro da equação de estado, $\omega(z) \equiv p/\rho$, pode permitir uma clara distinção entre um modelo de constante cosmológica e um dirigido por um campo escalar rolando para baixo seu potencial.

Maor *et al.*[201] e Weller & Albrecht[202], também observaram que, de modo a limitar a evolução da equação de estado com as observações de SNe, é necessário um *prior* (um conhecimento *a priori* a ser inserido na análise estatística) bastante acurado, sobre a densidade de matéria média do universo. Um modo natural de contornar este problema seria considerar os limites sobre o parâmetro de densidade das medidas da luminosidade de raio-X dos aglomerados de galáxias, em uma análise conjunta com as observações de SNe Ia.

Neste apêndice investigaremos as implicações cosmológicas dos dados de raio-X dos aglomerados de galáxias e das SNe Ia, considerando duas classes diferentes de equações de estado evoluindo com o *redshift*. No primeiro cenário (daqui para a frente chamado de *Modelo 1*), o parâmetro da equação de estado é definido por[198]

$$\text{Model 1 : } \omega(z) = \omega_o + \omega_1 z, \quad (7.1)$$

enquanto que no segundo cenário, temos[199, 200]

$$\text{Model 2 : } \omega(z) = \omega_o + \frac{\omega_1 z}{1 + z} \quad (7.2)$$

onde ω_o e ω_1 são constantes.

Devemos ainda observar que a expressão linear do modelo 1 fornece uma aproximação razoável para a maioria dos modelos de quintessência até a distância de uns poucos *redshifts* e, claro, ela deve ser exata para modelos onde $\omega(z)$ é constante ou varia muito lentamente. O aspecto indesejável da primeira expressão é que ela cresce sem limites em altos *redshifts*, ou seja, $z > 1$ (por exemplo, a distância até a última superfície de espalhamento em $z_{lss} \simeq 1100$). Para resolver tal problema, alguns autores[199, 200] propuseram a segunda forma, que tem a vantagem de dar um $\omega(z)$ finito para todos os *redshifts* z . Em ambos os casos, ω_o é o valor presente do parâmetro da equação de estado, e ω_1 define sua taxa de variação próximo à época presente ($z = 0$).

7.2 Equações Básicas

É assumido que o universo é plano e que sua dinâmica é regida por um fluido de matéria escura fria (CDM) e por um componente de quintessência. Ambas as componentes são separadamente conservadas, e o parâmetro da equação de estado do componente de quintessência é representado por uma das parametrizações das Eqs. (7.1) e (7.2). Integrando as leis de conservação da energia para cada componente e combinando o resultado com a equação de FRW, mostramos que o parâmetro de Hubble para ambos os modelos pode ser escrito como:

$$H_{Modelo1}^2 = H_0^2 \left[\Omega_M(1+z)^3 + (1-\Omega_M)(1+z)^{3(1+\omega_0-\omega_1)} e^{3\omega_1 z} \right], \quad (7.3)$$

e

$$H_{Modelo2}^2 = H_0^2 \left[\Omega_M(1+z)^3 + (1-\Omega_M)(1+z)^{3(1+\omega_0+\omega_1)} e^{-3\omega_1(z/(1+z))} \right], \quad (7.4)$$

onde o índice “0” denota uma quantidade presente, e Ω_M é o parâmetro de densidade CDM.

A primeira tentativa envolvendo a fração de massa do gás como um teste cosmológico foi originalmente realizada por Pen[203] e Sasaki[204], e posteriormente completamente desenvolvida por Allen *et al.*[205], que analisou as observações em raio-X para seis aglomerados lenticulares relaxados observados com o Chandra no intervalo de *redshifts* $0.1 < z < 0.5$. Uma análise similar também foi feita para modelos convencionais de quintessência com parâmetro de equação de estado constante por Lima *et al.*[182]. Estes autores também discutiram o caso de um cenário cosmológico dirigido por uma energia fantasma ($\omega < -1$). Mais tarde, este teste também foi aplicado no contexto da equação de estado do gás de Chaplygin[206]. Mais recentemente, uma análise detalhada usando uma amostra melhorada observada com o Chandra (26 aglomerados) foi realizada por Allen e colaboradores[3], também considerando um parâmetro de equação de estado constante. Em tais estudos, é usualmente assumido que a fração de massa bariônica do gás nos aglomerados de galáxias fornece uma amostra coerente da distribuição de bárions no universo. No que segue, a fração de massa do gás é definida como[182, 3]

$$f_{\text{gas}}(z_i) = \frac{b\Omega_b}{(1+0.19h^{3/2})\Omega_M} \left[2h \frac{D_A^{\text{SCDM}}(z_i)}{D_A^{\text{DE}}(z_i)} \right]^{1.5},$$

onde b é um fator de viés motivado por simulações da dinâmica do gás que levam em conta o fato de que a fração de bárions nos aglomerados parece ser menor do que no

universo como um todo, Ω_b seria o parâmetro de densidade de massa bariônica, com o termo $(2h)^{3/2}$ representando a mudança no parâmetro de Hubble entre a cosmologia padrão e os cenários de quintessência, enquanto que a razão $D_A^{\text{SCDM}}(z_i)/D_A^{\text{DE}}(z_i)$ leva em conta desvios na geometria do universo em relação ao modelo padrão CDM Einstein-de Sitter.

De modo a derivar os limites da fração de massa do gás de raio-X devemos usar o conceito de distância de diâmetro angular, $D_A(z)$. Tal quantidade é diretamente derivada no presente contexto (veja, no caso, as Refs. [182] e [206]):

$$D_A^{\text{DE}} = \frac{H_o^{-1}}{(1+z)} \int_{x'}^1 \frac{dx}{x^2 H(x)}. \quad (7.5)$$

onde $x = \frac{R(t)}{R_o} = (1+z)^{-1}$ é uma variável de integração conveniente. No que segue, consideraremos em nosso modelo estatístico apenas modelos cosmológicos planos com priors Gaussianos de $h = 0.72 \pm 0.08$ [207] com $b = 0.824 \pm 0.089$ [3] e $\Omega_b h^2 = 0.0214 \pm 0.002$ [208].

7.3 Limites Observacionais

Vamos agora discutir os limites obtidos através dos dados da luminosidade de raio-X dos aglomerados de galáxias e das SNe Ia. Primeiro, é importante frisar que os 26 aglomerados catalogados por Allen *et al.*[3] são todos de sistemas relativamente relaxados e regulares, para os quais temos confirmação de resultados independentes para o parâmetro de densidade de matéria, através de estudos das lentes gravitacionais.

De modo a determinar os parâmetros cosmológicos ω_o e ω_1 usamos a minimização do χ^2 com ω_0 e ω_1 no intervalo $[-2.3, -0.4]$ e $[-4, 6.5]$, respectivamente, em passos de 0.025. Os níveis de confiança de 68.3%, 90.0% e 95.4% são definidos pelos níveis convencionais de χ^2 de dois parâmetros livres, que são 2.30, 4.61 e 6.17, respectivamente. É muito importante notar que *não consideramos nenhum prior em Ω_M* , como é usualmente requerido pelo teste das SNe Ia, e foi até hoje feito pelos diversos autores citados acima.

Em adição à nossa análise da fração de massa do gás, nós consideramos as medidas de SNe Ia como mostradas por Riess *et al.*[1]. O melhor ajuste do modelo da Eq. (7.3) é $\chi^2 = 202.06$, $\omega_o = -1.25$, $\omega_1 = 1.3$ e $\Omega_M = 0.26$. Para o Modelo 2, o melhor ajuste é $\chi^2 = 202.02$, $\omega_o = -1.4$, $\omega_1 = 2.57$ e $\Omega_M = 0.26$.

Apresentamos agora nossa análise conjunta (dos dados da luminosidade de raio-X de aglomerados de galáxias e das SNe Ia). Para o primeiro parâmetro da equação de estado achamos, em 2σ de confiança, que $-1.78 \leq \omega_o \leq -0.82$ e $-1.2 \leq \omega_1 \leq 2.7$. Para o outro modelo temos $-2.0 \leq \omega_o \leq -0.8$ e $-2.0 \leq \omega_1 \leq 5.5$ em 2σ . Na Fig. 7.1, mostramos contornos de probabilidade constante no plano ω_o - ω_1 . Note que a variação permitida para ω_o e ω_1 é razoavelmente grande, mostrando claramente a impossibilidade de estabelecermos limites restritivos nestes cenários de quintessência. Contudo, estes limites são melhores do que os obtidos por uma simples análise dos dados das SNe Ia apenas, uma vez que neste caso, as incertezas em ambos os parâmetros estão fortemente correlacionadas quando marginalizamos sobre Ω_M .

Neste ponto, é interessante comparar nossos resultados com outras recentes determinações de ω_o e ω_1 derivadas de métodos independentes. Por exemplo, os limites da idade recentemente derivados por Jain e Dev[209] são $\omega_o \leq -0.31$ e $\omega_1 \leq 0.96$ para o primeiro modelo, e $\omega_o \leq -0.31$ e $\omega_1 \leq 3.29$ para o segundo. Riess *et al.*[1] achou $\omega_o = -1.31_{-0.28}^{+0.22}$ (1σ) e $\omega_1 = 1.48_{-0.90}^{+0.81}$ (1σ) com as incertezas fortemente correlacionadas, em ambos os parâmetros. No artigo de Padmanabhan & Choudhury[200] devemos usar um Ω_M constante para efetivarmos a análise do plano $\omega_o - \omega_1$. Devemos ainda observar que a equação de estado correspondente à constante cosmológica está dentro do contorno de 1σ para $0.21 < \Omega_M < 0.41$, e modelos com $\omega_o > -1/3$ estão descartados com alta confiança estatística para $\Omega_M < 0.4$ (precisaríamos de um valor de ω_1 extremamente negativo neste caso, e apesar das altas incertezas em ω_1 presentes neste conjunto de dados, sabemos que esse parâmetro não pode variar muito de ω_o); esta análise observacional das supernovas claramente indica que os dados não são sensíveis a ω_1 quando comparado ao ω_o .

7.4 Conclusão e Perspectivas

Discutimos aqui duas possíveis e simples parametrizações da equação de estado obedida por modelos de quintessência, como recentemente apresentadas pela literatura. Nossos resultados sugerem que vale a pena usarmos as estimativas da fração de massa do gás em aglomerados de galáxias em uma análise conjunta com dados de SNe Ia, uma vez

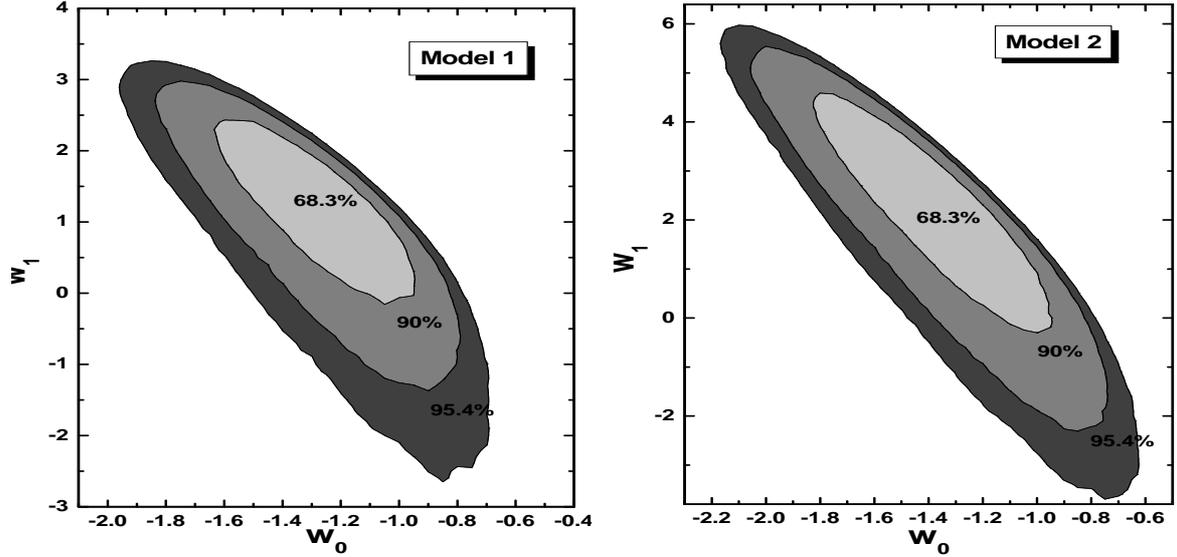


Figura 7.1: Limites marginalizados no plano w_0 e w_1 de uma análise conjunta dos dados do Chandra ($f_{\text{gas}}(z)$) e SNe Ia para o modelo 1 (painel esquerdo) e 2 (painel direito). As linhas sólidas marcam os limites de confiança em 1, 2 e 3σ .

que os limites obtidos para Ω_M (e outras quantidades) não requerem qualquer prior na análise. Mais importante ainda, obtivemos também limites para w_0 e w_1 que não podiam ser obtidos antes sem o uso de um prior em Ω_M .

As parametrizações parecem ser mais eficientes para explicar este conjunto de dados, uma vez que elas fornecem um baixo χ^2 ; contudo elas também possuem um parâmetro adicional, e valeria a pena emprendermos um estudo mais detalhado das conseqüências disso, como por exemplo empregando um critério estatístico mais específico (critérios de informação de Akaike ou Bayesiano, por exemplo). Uma análise mais detalhada deste tipo será um dos nossos objetivos futuros.

Capítulo 8

LIMITANDO H_0 DO EFEITO SUNYAEV-ZEL'DOVICH, DOS DADOS DE RAIO-X, E DAS OSCILAÇÕES DOS BÁRIONS

8.1 Introdução

Os aglomerados de galáxias são as estruturas em evolução mais impressionantes de um primeiro estágio do universo. Usualmente, eles congregam milhares de galáxias e são também dotados de um gás quente (no meio interaglomerado), emitindo raio-X primariamente através de Bremsstrahlung térmico. Vários estudos na última década sugeriram que a combinação dos dados de diferentes processos físicos, em aglomerados de galáxias, fornecem um método natural para a estimativa de parâmetros cosmológicos.

Um fenômeno importante que ocorre nos aglomerados é o efeito Sunyaev-Zel'dovich (SZE), uma pequena distorção do espectro da RCF provocada pelo espalhamento Compton inverso dos fótons da RCF que passam através de uma população de elétrons quentes[210]. Uma vez que o SZE é insensível ao *redshift* dos aglomerados de galáxias, essa técnica é uma ferramenta conveniente para estudos em *redshifts* intermediários, onde a abundância de aglomerados depende fortemente da cosmologia de fundo (a única dependência em *redshift* aparece no fluxo total do SZE, devido ao tamanho aparente do

aglomerado). Outro processo fundamental é a emissão em raio-X dos elétrons quentes do meio interaglomerado. Quando o brilho superficial do raio-X é combinado com o decréscimo de temperatura do SZE no espectro da RCF, a distância de diâmetro angular dos aglomerados de galáxias é prontamente obtida.

A possibilidade de estimar as distâncias dos aglomerados de galáxias através da técnica SZ/raio-X foi sugerida há muito tempo por muitos autores[211, 212], mas apenas recentemente ela foi aplicada com sucesso para um grande número de aglomerados (para revisões, veja a Ref.[212]). Tal método é baseado na dependência diferente entre a densidade de elétrons do aglomerado (n_e), a temperatura T_e do SZE ($\propto n_e T_e$) e o Bremsstrahlung do raio-X ($\propto n_e^2 T_e^{1/2}$). Combinando tais medidas é possível estimarmos a distância de diâmetro angular, e inferirmos o valor da constante de Hubble, sempre que definirmos a cosmologia empregada. A principal vantagem deste método de estimativa de H_0 é que ele não se baseia na escada de distâncias extragaláticas, sendo portanto totalmente independente de qualquer calibrador local de distância. Uma desvantagem básica, contudo, reside na dificuldade de modelagem do gás do aglomerado, o que causa grandes incertezas sistemáticas em sua determinação. Em particular, isso significa que os efeitos sistemáticos sobre H_0 são bastante diferentes dos demais métodos, como o método tradicional da escada de distâncias, ou as lentes gravitacionais[213, 214].

Na atual cosmologia plana Λ CDM, uma técnica possível para quebrarmos a degenerescência no parâmetro de densidade de massa (Ω_m) seria a aplicação de uma análise conjunta envolvendo as oscilações acústicas dos bárions (BAO). Neste apêndice adotaremos essa técnica ao espaço de parâmetros (H_0, Ω_m), obtendo novos limites sobre a constante de Hubble H_0 através da assinatura do BAO, dada pelo catálogo Sloan Digital Sky Survey (SDSS). Nossas análises, baseadas nos dados de SZE/raio-X para uma amostra de 25 aglomerados com morfologia triaxial, fornece $H_0 = 74_{-3.5}^{+4}$ km s⁻¹ Mpc⁻¹ (1σ , desprezando incertezas sistemáticas). Este resultado está em bom acordo com estudos independentes do projeto *Hubble Space Telescope* e as recentes estimativas do WMAP.

8.2 A determinação de H_0 : Aspectos Qualitativos

Para estimarmos a distância ao aglomerado de sua espectroscopia em raio-X, precisamos adicionar algumas pressuposições complementares sobre sua geometria. A importância da geometria intrínseca do aglomerado tem sido enfatizada por muitos autores[215, 216]. A geometria esférica padrão tem sido severamente questionada, desde que as observações do satélite Chandra e do XMM-Newton mostraram que os aglomerados usualmente exibem um brilho superficial elíptico. De fato, o problema da estimativa da forma do aglomerado é bastante difícil, uma vez que muitos aglomerados não aparecem em rádio, raio-X, ou no ótico. Outra fonte de dificuldades está relacionada com as barras de erro. Assumindo que os aglomerados têm uma forma simétrica nos eixos, diferentes autores introduziram uma incerteza randômica bruta em H_0 de 15%–30%[213, 217]. A forma assumida para o aglomerado também afeta consideravelmente as distâncias SZE/raio-X, e conseqüentemente as estimativas para a constante de Hubble.

Fox & Pen[215] estimaram a constante de Hubble assumindo aglomerados triaxiais (leia-se “não esféricos”), e medindo a distância usando observações artificiais, corrigidas para a esfericidade (forma esférica). Aglomerados triaxiais podem ser úteis em reconciliar as discrepâncias observadas na massa total dos aglomerados, como as computadas nas lentes gravitacionais e nas medidas de raio-X (veja a Ref.[63]). De Filippis e colaboradores[214] ainda mostraram que a hipótese esférica é fortemente rejeitada, para a maior parte dos membros da amostra estudada por eles.

A determinação de H_0 tem uma importância prática e teórica para muitas propriedades astrofísicas de galáxias e quasares, e também para muitos cálculos cosmológicos, como a idade do universo, seu tamanho e densidade energética, a nucleossíntese primordial, dentre outros[218, 219]. Spergel *et al.*[5] mostrou que estudos da RCF, isolados, não podem fornecer limites fortes sobre o valor de H_0 por conta própria. Este problema ocorre devido à degenerescência no espaço de parâmetros, e pode ser contornado apenas com o uso de medidas independentes de H_0 [220].

De acordo com o quadro geral da formação de estruturas, baseado na matéria escura fria (CDM), flutuações em grande escala cresceram desde $z \sim 1000$ através de instabilidades gravitacionais. As perturbações cosmológicas excitam as ondas sonoras no plasma relativístico, produzindo os picos acústicos no universo primordial. Eisenstein *et al.*[221]

apresentaram a função de correlação em grande escala do catálogo Sloan Digital Sky Survey (SDSS), mostrando clara evidência de um pico acústico de bárions na escala $100h^{-1}$ Mpc, o que está em excelente acordo com as previsões do WMAP retiradas dos dados da RCF. O método da oscilação acústica dos bárions (Baryon Acoustic Oscillations - BAO) é *independente da constante de Hubble* H_0 , o que significa que podemos usar a assinatura do BAO para quebrarmos a degenerescência do parâmetro de massa Ω_m . Então, combinando o método de SZE/raio-X para obtermos \mathcal{D}_A , com o BAO, é possível melhorarmos os limites sobre H_0 (para recentes aplicações do BAO, veja a Ref.[222]).

Assumindo que os aglomerados são elipsóides com um eixo paralelo à linha de visada, nós derivamos novos limites para a constante de Hubble H_0 . Considerando a amostra de 25 aglomerados triaxiais dada por De Filippis *et al.*[214], realizamos uma análise conjunta combinando os dados, obtidos do SZE e do brilho superficial de raio-X, com as recentes medidas do SDSS do pico acústico dos bárions[221].

8.3 Equações Básicas e a Amostra

Vamos agora considerar que o universo é descrito pela geometria plana de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), dirigida pela matéria escura fria e por uma constante cosmológica. Neste caso, teremos apenas dois parâmetros livres (H_0, Ω_m), e a distância de diâmetro angular, \mathcal{D}_A , será[182, 223, 214]

$$D_A(z; h, \Omega_m) = \frac{3000h^{-1}}{(1+z)} \int_0^z \frac{dz'}{H(z'; \Omega_m)} \quad \text{Mpc}, \quad (8.1)$$

onde $h = H_0/100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ e a função adimensional $H(z'; \Omega_m)$ é dada por

$$H = \left[\Omega_m(1+z')^3 + (1 - \Omega_m) \right]^{1/2}. \quad (8.2)$$

Seguindo De Filippis *et al.*[214], uma morfologia triaxial geral será adotada aqui. Neste caso, o interaglomerado médio é descrito por uma distribuição triaxial isotérmica de modelo β , e o decremento da temperatura do SZE é dado por

$$\begin{aligned} \Delta T_{SZ} &\equiv T_0 f(\nu, T_e) \frac{\sigma_T k_B T_e}{m_e c^2} n_{e0} \sqrt{\pi} \\ &\times \frac{\mathcal{D}_A \theta_{c, \text{proj}}}{b^{3/4}} \sqrt{\frac{e_1 e_2}{e_{\text{proj}}}} g(\beta), \end{aligned} \quad (8.3)$$

onde $T_0 = 2.728K$ é a temperatura da RCF, T_e é a temperatura do gás, σ_T é a seção de choque de Thompson, o fator $f(\nu, T_e)$ leva em conta deslocamentos da frequência e correções relativísticas, n_{e0} é a densidade numérica central do gás do aglomerado, b é uma função da forma do aglomerado e da orientação deste, e_{proj} é a taxa axial do eixo maior para o menor das isofótas projetadas observadas, $\theta_{c,\text{proj}}$ é a projeção sobre o plano do céu do raio do núcleo angular intrínseco, e $g(\beta) = \Gamma(3\beta - 1/2)/\Gamma(3\beta)$ (Γ é a função Gamma).

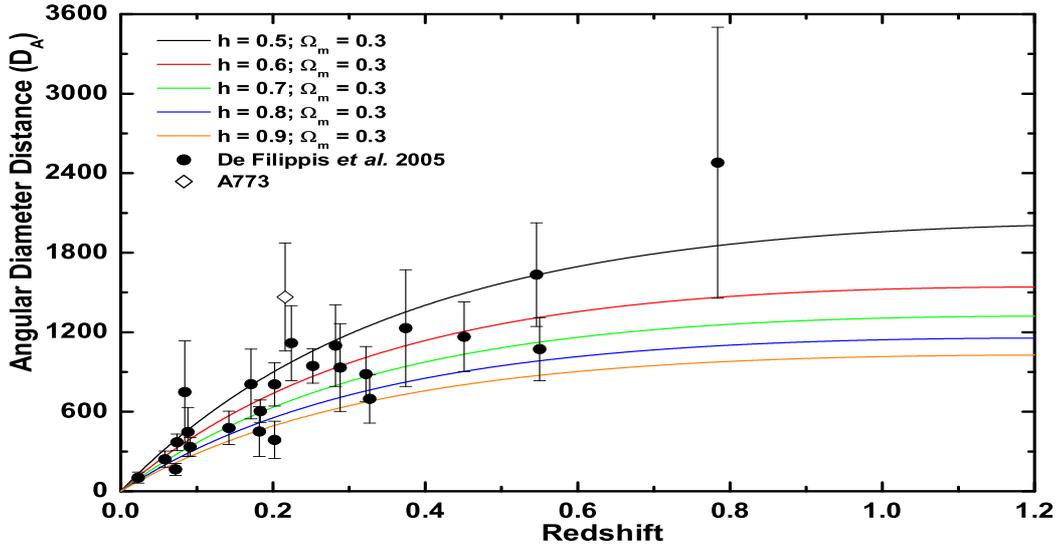


Figura 8.1: Distância do diâmetro angular como função do *redshift* para $\Omega_m = 0,3$ e alguns valores selecionados do parâmetro h . Os pontos correspondem às distâncias de SZE/X-ray para os 25 aglomerados de De Filippis *et al.*[214]. O diamante aberto corresponde ao aglomerado de Abell 773, um ponto fora do conjunto, que foi excluído de nossa análise estatística.

Similarmente, o brilho superficial central de raio-X S_{X0} pode ser escrito como

$$S_{X0} \equiv \frac{\Lambda_{eH} \mu_e/\mu_H}{4\sqrt{\pi}(1+z)^4} \frac{n_{e0}^2 \mathcal{D}_A \theta_{c,\text{proj}}}{b^{3/4}} \sqrt{\frac{e_1 e_2}{e_{\text{proj}}}} g(\beta), \quad (8.4)$$

onde z é o *redshift* do aglomerado, Λ_{eH} é a função de resfriamento em raio-X do inter-aglomerado médio, e μ é o peso molecular ($\mu_i \equiv \rho/n_i m_p$).

De Filippis e colaboradores (2005)[214] estudaram e corrigiram as medidas de \mathcal{D}_A para 25 aglomerados, conseguindo um melhor acordo com os modelos Λ CDM. Usamos duas

amostras estudadas por eles para investigarmos as medidas surgidas das observações de SZE/raio-X. Uma das amostras, compilada por Reese *et al.* (2002)[213], é uma seleção de 18 aglomerados galácticos distribuídos sobre o intervalo de *redshift* $0,14 < z < 0,8$. A outra, a amostra de Mason *et al.* (2001)[224], tem 7 aglomerados obtidos da amostra limitada em fluxo de raio-X de Ebeling *et al.* (1996)[225]. De Filippis *et al.* (2005)[214] mostra que as amostras possuem um pouco de viés, com aglomerados fortemente alongados preferencialmente alinhados ao longo da linha de visada. Esses resultados sugerem que 15 aglomerados estão de fato mais alongados ao longo da linha de visada, enquanto que os 10 aglomerados restantes são comprimidos.

Na Fig. 8.1, a amostra do aglomerado galáctico é plotada em um diagrama de Hubble residual, usando um modelo plano de concordância cósmica ($\Omega_m = 0,3$ e $\Omega_\Lambda = 0,7$). Vemos que o aglomerado A773 é o grande ponto fora da curva, e nossa análise estatística confirma que sua inclusão leva ao mais alto χ^2 . Por essa razão nós excluimos este ponto de nossa análise estatística posterior.

8.4 Análise e Resultados

Agora, realizaremos um ajuste χ^2 sobre o plano $h - \Omega_m$. Em nossa análise usamos uma probabilidade máxima que pode ser determinada por uma estatística de χ^2 , tal que

$$\chi^2(z|\mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{i}} \frac{(\mathbf{D}_A(\mathbf{z}_i; \mathbf{p}) - \mathbf{D}_{Ao,i})^2}{\sigma_{\mathbf{D}_{Ao,i}}^2}, \quad (8.5)$$

onde $D_{Ao,i}$ é a distância de diâmetro angular observacional, $\sigma_{D_{Ao,i}}$ é a incerteza na distância individual, e o par $\mathbf{p} \equiv (\mathbf{h}, \Omega_m)$ é o conjunto completo de parâmetros.

No que segue, primeiro consideramos as distâncias de SZE/raio-X separadamente e, depois, apresentamos uma análise conjunta incluindo a assinatura BAO do catálogo SDSS. Note que uma cosmologia plana específica não foi adicionada à mão nas análises abaixo.

8.5 Limites Vindos das Medidas de SZE/raio-X

Consideraremos agora os 24 aglomerados (sem o A773, como mostrado na Fig. 8.1), que constituem os dados de SZE/raio-X de De Filippis *et al.* (2005)[214]. Nossas análises indicaram que qualquer modelo cosmológico poderia ser aceito por essa amostra, até 3σ

(com 2 parâmetros livres); isso mostra que apenas usando a amostra elipsoidal de aglomerados, não podemos limitar os componentes energéticos de um dado modelo cosmológico. Isso ocorre basicamente porque as barras de erro são grandes, principalmente nos *redshifts* intermediários e altos.

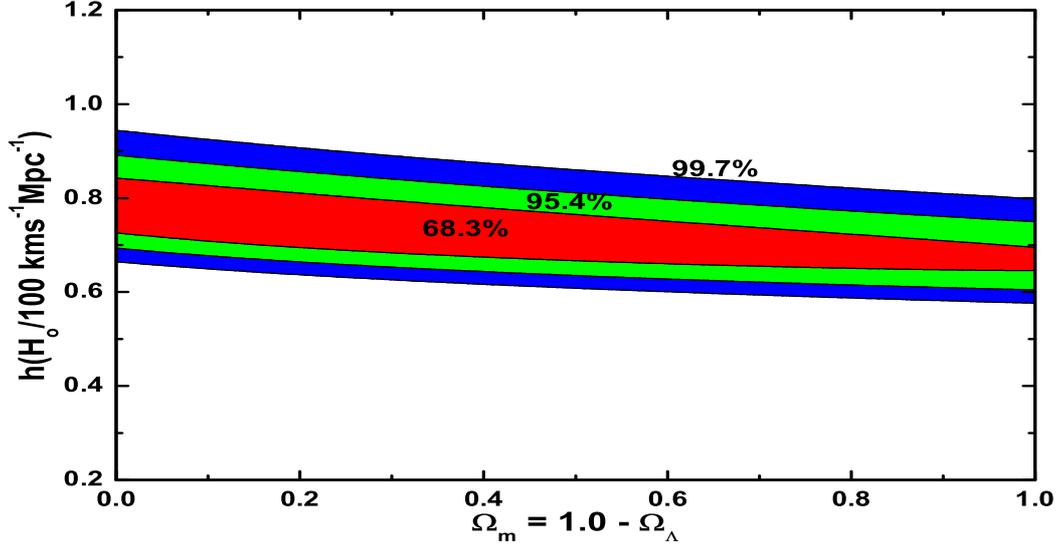


Figura 8.2: Regiões de confiança estatística (68,3%, 95,4% e 99,7%) no plano (Ω_m, h) fornecidas pelos dados de SZE/X-ray de De Filippis *et al.* (2005)[214]. Os valores de melhor ajuste são $h = 0,75$ e $\Omega_m = 0,15$.

Na Fig. 8.2 mostramos os contornos de probabilidade constantes (68,3%, 95,4% e 99,7%) no espaço de parâmetros $h - \Omega_m$ para os dados de SZE/raio-X discutidos anteriormente. Note que apenas um pequeno intervalo do parâmetro h é permitido, $(0,64 \leq h \leq 0,85)$, para 1σ de confiança. Em particular, achamos $h = 0,75_{-0,07}^{+0,07}$ e $\Omega_m = 0,15_{-0,15}^{+0,57}$ com $\chi_{min}^2 = 24,4$ para 68,3% c.l. (nível de confiança, ou confidence level - c.l.), com 1 parâmetro livre. Naturalmente, tais limites sobre h são razoavelmente dependentes do modelo cosmológico adotado. Por exemplo, se fixamos $\Omega_m = 0,3$ teremos $h = 0,74$, e para $\Omega_m = 1,0$ teremos $h = 0,67$, e ambos os casos são permitidos com alto grau de confiança. Claramente, vemos que um teste cosmológico adicional (fixando Ω_m) é necessário de modo a quebrar a degenerescência do plano (Ω_m, h) .

Efeitos sistemáticos ainda precisam ser considerados. Os erros comuns são: $\pm 8\%$ do efeito SZ, $\pm 10\%$ do raio-X, -3% dos halos em rádio, 5% para N_H galático, 10%

para isothermalidade, 2% para SZ cinético, -20% para efeitos do aglomeramento, $\pm 12\%$ das confusões nas fontes de rádio, $\pm 3\%$ do brilho primário e 1% de incertezas na RCF. Quando combinamos os erros em quadratura, achamos que o erro típico é de 20% - 30%, o que está em acordo com outros trabalhos da literatura[224, 213, 226].

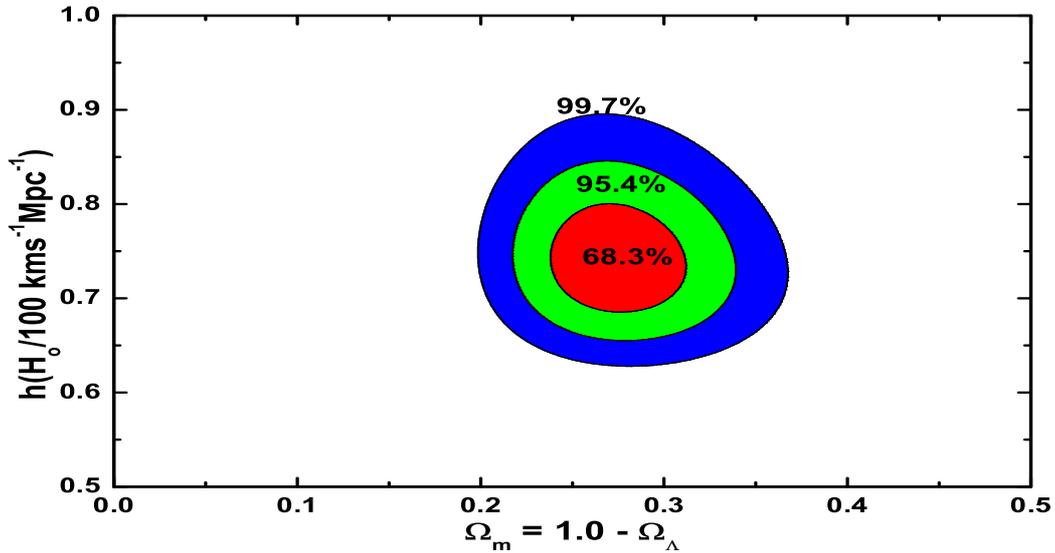


Figura 8.3: Contornos no plano $\Omega_m - h$ usando análises conjuntas de SZE/X-ray e BAO. Os contornos correspondem aos níveis de confiança de 68,3%, 95,4% e 99,7%. Os parâmetros de melhor ajuste convergem para $h = 0,74$ e $\Omega_m = 0,27$.

8.6 Análise Conjunta Usando as Técnicas de SZE/raio-X e do BAO

Como observado antes, limites mais restritos no espaço de parâmetros (h, Ω_m) podem ser obtidos combinando as técnicas de SZE/raio-X com a assinatura do BAO[221]. O pico detectado (de uma amostra de 46748 galáxias vermelhas luminosas, selecionadas da amostra principal do catálogo SDSS) surgiu, como predito pela teoria, precisamente na escala medida de $100 h^{-1}$ Mpc. Basicamente, esse pico ocorre devido às oscilações acústicas dos bárions no plasma fóton-bárion primordial, antes da recombinação. Vamos agora considerar tal pico como um teste cosmológico adicional sobre a amostra dos aglomerados

elípticos. A medida de tal pico é caracterizada pela equação[221]

$$A \equiv \frac{\Omega_m^{1/2}}{H(z_*)^{1/3}} \left[\frac{1}{z_*} \Gamma(z_*) \right]^{2/3} = 0,469 \pm 0,017,$$

onde $z_* = 0,35$ é o *redshift* no qual a escala acústica foi medida, e $\Gamma(z_*)$ é a distância comóvel adimensional até z_* .

Note que a quantidade acima é independente da constante de Hubble e, como tal a assinatura do BAO, por si só, limita apenas o parâmetro Ω_m . Essa propriedade é bastante característica da assinatura do BAO, assim diferenciando tal técnica dos demais testes cosmológicos clássicos, como a fração de massa do gás[182, 3, 34], a distância luminosidade[227], ou a idade do universo[206, 228].

Na Fig. 8.3, mostramos as regiões de confiança para a análise conjunta da distância SZE/raio-X dos aglomerados e a assinatura do BAO. Comparando com a Fig. 8.2, podemos ver como a assinatura do BAO quebra a degenerescência no plano (Ω_m, h) . Observando a figura, vemos que o teste do BAO incute uma intensiva ortogonalidade centrada em $\Omega_m = 0,27_{-0,02}^{+0,03}$ com respeito aos dados da distância de diâmetro angular, determinada pelo processo SZE/raio-X. Achemos $h = 0,738_{-0,033}^{+0,042}$ e $\chi_{min}^2 = 24,5$ para 68,3% (c.l.) com 1 parâmetro livre. Uma importante lição mostrada nesta análise foi a de que a combinação de SZE/raio-X com o BAO fornece um método bastante interessante para limitarmos a constante de Hubble.

Na Fig. 8.4, plotamos a função de probabilidade para o parâmetro h , em um universo plano Λ CDM, obtida com a análise conjunta SZE/raio-X + BAO. As linhas pontilhadas são cortes nas regiões de probabilidade de 68,3% e 95,4%.

Nossos resultados estão alinhados com análises recentes baseadas em diferentes observações cosmológicas, como a obtida pelo time do WMAP de $h = 0,73 \pm 0,03$ [5], e outra obtida pelo HST Project de $h = 0,72 \pm 0,08$ [207]. Note, contudo, que nosso resultado não concorda com a recente determinação de $h = 0,62 \pm 0,013$ (randômico) $\pm 0,05$ (sistemáticos), advogada por Sandage e colaboradores (2006)[229], um resultado obtido com base em supernovas do tipo Ia, calibradas com as variáveis Cefeidas em galáxias próximas que as abrigavam.

Neste ponto, seria interessante comparar nossos resultados com outros recentes trabalhos nos quais os limites em h foram obtidos fixando a cosmologia $\Omega_m = 0,3$, $\Omega_\Lambda = 0,7$, da concordância cósmica, e assumindo geometria esférica para os aglomerados. Uma

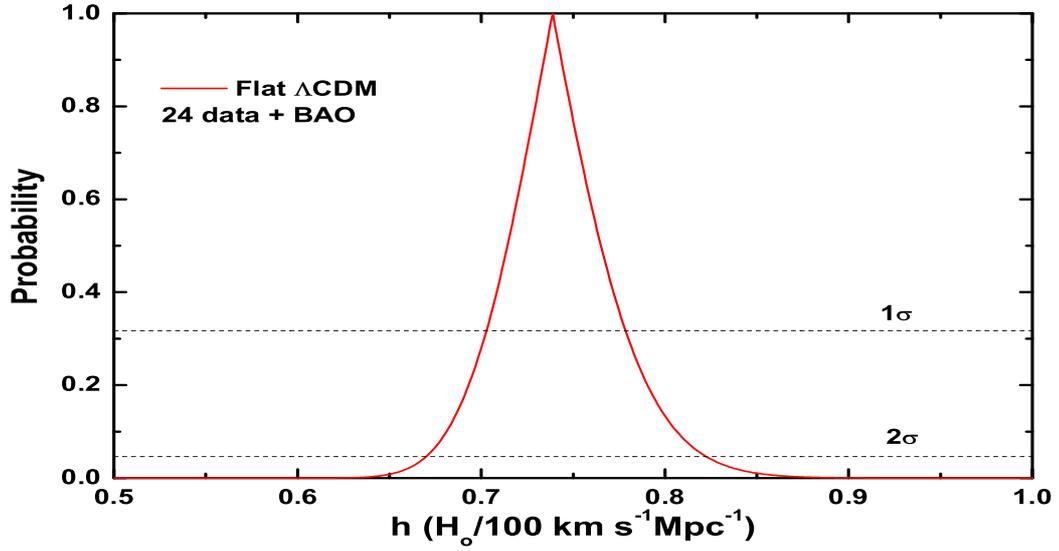


Figura 8.4: Função de probabilidade para o parâmetro h em um universo Λ CDM plano, das emissões de SZE/X-ray. As linhas sombreadas são cortes nas regiões de probabilidade de 68,3% e 95,4%. Vemos que a região permitida é bem limitada e está de acordo com outros estudos independentes[207, 5].

Tabela 8.1: Método SZ/X-ray: Limites para h de aglomerados de galáxias (Λ CDM).

Referências (dados)	Ω_m	h (1σ)	χ^2
Mason <i>et al.</i> 2001 (7)[224]	0.3	$0.66^{+0.14}_{-0.11}$	$\simeq 2$
Reese <i>et al.</i> 2002(18)[213]	0.3	$0.60^{+0.04}_{-0.04}$	16.5
Reese 2004 (41)[226]	0.3	$0.61^{+0.03}_{-0.03}$	–
Jones <i>et al.</i> 2005 (5)[217]	0.3	$0.66^{+0.11}_{-0.10}$	–
Bonamente <i>et al.</i> 2006 (38)[63]	0.3	$0.77^{+0.04}_{-0.03}$	31.6
Nossos Resultados (24)	$0.15^{+0.57}_{-0.15}$	$0.75^{+0.07}_{-0.07}$	24.4
Nossos Resultados (24)+BAO	$0.27^{+0.04}_{-0.03}$	$0.74^{+0.04}_{-0.03}$	24.5

medida usando o efeito SZ foi fornecida por Mason *et al.* (2001)[224], usando 5 aglomerados, e dando $h = 0,66_{-0,11}^{+0,14}$; Reese e co-autores (2002)[213], usando 18 aglomerados, achou $h = 0,60 \pm 0,04$, e em uma análise posterior[226], com 41 aglomerados, obteve $h \approx 0,61 \pm 0,03$; Jones *et al.* (2005)[217] achou $h = 0,66_{-0,10}^{+0,11}$, usando uma amostra de 5 aglomerados, livre de qualquer viés na orientação destes. Em um recente artigo, Bonamente *et al.* (2006)[63], usando 38 aglomerados, obteve $h = 0,769_{-0,034}^{+0,039}$. Todos esses resultados, usando a técnica de SZ/raio-X, apresentaram uma incerteza sistemática de 10%-30%. Na tabela 8.1, nós resumimos as estimativas de H_0 dos aglomerados em relação aos modelos Λ CDM (os dados entre parentesis representam o número de aglomerados).

Vale a pena notar que o cenário de melhor ajuste derivado aqui, $\Omega_m = 0,27_{-0,02}^{+0,03}$ e $h = 0,738_{-0,033}^{+0,042}$, corresponde a um universo acelerado com $q_0 = -0,6$, uma idade evolucionária total de $t_o \simeq 10h^{-1}$ Gyr, e um *redshift* de transição (da desaceleração para a aceleração) de $z_t \simeq 0,6$. Para 95,4% c.l. (2σ) a análise conjunta BAO+SZE/raio-X também fornece $h = 0,74_{-0,07}^{+0,08}$. Esperamos que em um futuro bem próximo, os desenvolvimentos relacionados à física dos aglomerados possam lançar também alguma luz sobre a natureza da energia escura (para revisões veja as Refs.[230, 231]).

8.7 Conclusões

Desde o trabalho original de Hubble, a determinação precisa da escala de distâncias (H_0) tem sido um problema recorrente no desenvolvimento da cosmologia física. Até agora discutimos uma nova determinação da constante de Hubble baseada na técnica de distâncias de SZE/raio-X em uma amostra de 24 aglomerados, apresentada por De Filippis *et al.* (2005)[214]. A degenerescência do parâmetro Ω_m foi quebrada usando a assinatura das oscilações acústicas dos bárions, do catálogo SDSS. A constante de Hubble foi então limitada como sendo $h = 0,74_{-0,035}^{+0,04}$ e $_{-0,07}^{+0,08}$ para 1σ e 2σ , respectivamente. Esses limites foram derivados assumindo o modelo β elíptico para os aglomerados, e um cenário de universo plano Λ CDM.

Como vimos, a assinatura do BAO é uma ferramenta interessante para limitar diretamente o parâmetro de densidade de matéria, Ω_m , e, indiretamente, ele também me-

hora os limites da constante de Hubble obtidos de outras técnicas cosmológicas (como a distância dos aglomerados pelo SZE/raio-X). Nossa estimativa da constante de Hubble é consistente com recentes observações cosmológicas, como o terceiro ano dos resultados do WMAP e o HST Key Project. Implicitamente, tal acordo sugere que a morfologia elíptica, adotada na amostra dos aglomerados, é de fato bastante realística. Isso também reforça o interesse na pesquisa observacional dos aglomerados de galáxias, pois em futuro próximo mais e maiores amostras serão analisadas, e teremos menores incertezas sistemáticas e estatísticas, o que seguramente irá dar uma precisão nunca antes encontrada para o parâmetro de Hubble.

Capítulo 9

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

As observações cosmológicas dos últimos anos indicam que o universo tem uma geometria plana, e que está recentemente expandindo aceleradamente; essas observações ainda indicam que o conteúdo energético do universo é composto de $\sim 30\%$ de matéria gravitacionalmente atrativa (bárions e matéria escura) e $\sim 70\%$ de energia escura, uma componente relativística com pressão negativa. Contudo, para modelarmos mais realísticamente o universo, precisamos considerar a evolução de pequenas perturbações de densidade sob ação da gravidade, afim de explicarmos a anisotropia observada nas estruturas em pequena e grande escala (na escala de galáxias, aglomerados e superaglomerados de galáxias).

Mostramos no capítulo 5 os resultados de um trabalho recente[31], onde propusemos um novo formalismo analítico baseado na estatística não-extensiva de Tsallis (Power Law - PL), empregada no campo primordial descrevendo o contraste de densidade. Tal distribuição possui um parâmetro livre q que regula o grau de *não-gaussianidade* do campo primordial. A distribuição PL recupera a forma Gaussiana padrão quando $q \rightarrow 1$. Em outro recente artigo[32] analisamos as propriedades estatísticas, especialmente a normalização, de diversas distribuições (incluindo a distribuição PL) aplicadas ao campo primordial do contraste de densidade, e descobrimos que a conhecida distribuição de Burr[155, 156], além de possuir 2 parâmetros livres e permitir com isso a mesma flexibilidade que nossa distribuição PL , pois é uma generalização desta última[156], tem ainda a vantagem de corrigir o problema de normalização do formalismo original de PS.

Após termos definido o novo formalismo PL baseado na estatística não-extensiva de Tsallis, precisávamos verificar se o parâmetro livre q permitia efetivamente explicar os

atuais dados observacionais. No caso do catálogo de raio-X de galáxias HIFLUGCS[10], baseado no ROSAT All-Sky Survey, a função de massa de PS que se adequa aos dados fornece parâmetros de σ_8 (amplitude das flutuações de densidade em esferas de raio $8h^{-1}Mpc$) e Ω_m (densidade de matéria do universo) claramente fora (em 3σ ou mais) dos atuais limites definidos pelos resultados divulgados do 3º ano do WMAP[5]. Em outras palavras, o método de PS padrão não explica os atuais dados de raio-X de galáxias. Calculando o χ^2 pelo método de máxima verossimilhança nós asseguramos que, usando a distribuição PL com os dados do catálogo HIFLUGCS, obtemos parâmetros σ_8 e Ω_m plenamente compatíveis com os dados do WMAP[33]. Vemos claramente que o método PL se ajusta às observações com parâmetros compatíveis com o WMAP, enquanto o mesmo não se processa no método PS padrão[33]. Naturalmente, tais resultados devem depender do tipo de energia escura que está acelerando o universo. Os resultados descritos até aqui foram obtidos para o caso de uma constante cosmológica (Λ CDM).

Estudamos também a influência da *energia escura* no processo de formação de estruturas. O trabalho de incorporar modelos de energia escura na formação de estruturas do universo está começando a ser implementado na literatura. Por exemplo, o modelo de colapso esférico com energia escura homogênea foi discutido por Wang (2005)[232]; também no estudo da virialização, modelos onde energia escura imita o efeito de uma constante cosmológica foram implementados[172]; Independentemente, recentes catálogos de raio-X de altos *redshifts* ($z \geq 0.3$), como o EMSS, permitem limites restritos para a equação de estado da energia escura[233]. Nossos estudos nesta vertente já se encontram em andamento. Seguimos o trabalho de Percival (2005)[173], que analisou a formação de estruturas em um fundo homogêneo de energia escura, fornecendo uma fórmula de ajuste para o fator de crescimento linear, em cosmologias com ω constante. A incorporação desse ajuste com energia escura já foi concluído no formalismo PS padrão, e está sendo implementado em nosso formalismo PL. O passo seguinte será aplicá-lo para os demais modelos de energia escura presentes na literatura. Devemos também considerar diversas parametrizações $\omega(z)$, procurando empregá-las no modelo analítico de formação de estruturas, em conjunto com o método PL descrito anteriormente. Com tais análises pretendemos verificar a real influência da energia escura no processo de formação de estruturas.

No capítulo 6 a cosmologia não extensiva é ainda abordada na radiação de Bremsstrahlung, a radiação primária dos aglomerados de raio-X, com evidentes aplicações em astrofísica experimental. Vimos claramente que os dados experimentais atuais apontam para uma distribuição não-Maxwelliana, na forma de uma lei de potência, e deduzimos o formalismo da q-estatística aplicado a esse problema, como uma solução física mais consistente para o comportamento observado experimentalmente. Esperamos que nossos resultados sejam úteis em análises futuras da radiação de Bremsstrahlung dos aglomerados de galáxias.

Prosseguindo, mostramos que tratamentos de dados dos atuais catálogos de galáxias nos permitiram análises conjuntas[34, 35], mostradas em detalhe nos capítulos 7 e 8, que limitaram melhor os principais parâmetros dos modelos, objetivando eleger o candidato mais adequado para o novo paradigma cosmológico.

No capítulo 7, utilizando dados de supernovas e fração de massa do gás em aglomerados, discutimos a variação do parâmetro da equação de estado da energia escura, para 2 parametrizações distintas. Um aspecto interessante desse trabalho é que os resultados não necessitam de um prior em Ω_M , como ocorre usualmente nas análises envolvendo apenas os dados de supernovas.

No capítulo 8, apresentamos uma nova estimativa do parâmetro de Hubble, H_0 , através de uma análise conjunta envolvendo o efeito Sunyaev-Zeldovich (SZE), o espectro de raios-X de aglomerados e as oscilações acústicas dos bárions (*Baryon Acoustic Oscillations* - BAO). Mostramos que a degenerescência dos dados observacionais em relação a Ω_m é quebrada quando incluímos a assinatura do BAO, dada pelo catálogo do *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS).

Por fim, no apêndice A, analisamos a sonda de plasma no formalismo não extensivo, mostrando resultados e conclusões que possibilitarão aplicações diretas no processamento de materiais, e em futuros diagnósticos, mais precisos, dos plasmas astrofísicos.

Poderemos futuramente realizar simulações de N-Corpos para determinarmos a função de massa ideal de halos de matéria escura na fase não-linear. É bem compreendido hoje que o modelo de Press-Schechter se ajusta muito mal aos dados computacionais atuais, e isso em todas as épocas de formação. O modelo modificado da função de massa, de Sheth-Tormen[144, 234] fornece um melhor ajuste, mas ainda apresenta um número muito alto

da abundância de objetos raros, em todas as épocas, por um valor acima de 50%. Desse modo, um grande estudo foi empreendido usando diversas simulações de N-Corpos em diversos *redshifts*, para determinar uma equação ideal para a função de massa, com ajuste superior à função de massa de PS e de Sheth-Tormen[9]. Nosso intento será comparar todas as funções de massa apresentadas, incluindo a das simulações de N-Corpos, com nossa função de massa PL, e assim verificar as previsões e o poder de ajuste dessa última face às demais.

Estudaremos a formação de grandes estruturas usando nosso formalismo de Lei de Potências (PL) para o campo inicial das perturbações, implementando o modelo de energia escura do trabalho de Percival[173], como descrito anteriormente. Submeteremos igualmente trabalhos visando analisar um campo inicial de perturbações regido pela distribuição de Burr, que como vimos é capaz de resolver o problema de normalização de Press-Schechter. Também seria muito interessante um estudo da distribuição de Kaniadakis ou k-exponencial[157], uma vez que esta também, como a q-exponencial, se reduz à estatística padrão de Boltzmann-Gibbs (quando $k \rightarrow 0$, nesse caso). Uma possível relação entre a k-exponencial e a Burr, ou a q-exponencial, poderia ser de relevância para uma melhor compreensão da não-gaussianidade na cosmologia. Veremos nas análises subsequentes se tais distribuições oferecem a maleabilidade necessária para explicar os atuais dados em raio-X dos aglomerados de galáxias, assim como já verificamos ser o caso com nosso método PL. Visamos igualmente submeter artigos usando a distribuição de Burr e a k-exponencial junto com o modelo de energia escura de Percival[173], para termos um quadro geral da influência da energia escura no processo de formação de estruturas, usando um campo primordial de perturbações não-gaussiano.

Poderemos analisar aglomerados de galáxias, em médios e altos *redshifts*, utilizando os testes de raio-X, SNe Ia, diâmetro angular, *Gamma-Ray Bursts*, idade, efeito Sunyaev-Zel'dovich (ESZ) e Baryon Acoustic Oscillations (BAO); estudaremos então os mais recentes catálogos observacionais, usando diversos modelos cosmológicos nas análises, incluindo matéria e energia escura (diversos modelos de energia escura, parametrizações, além do caso da phantom-energy). Faremos assim um estudo sistemático pondo a prova os modelos mais cogitados na literatura. Com isso teremos uma base real de validação dos modelos que melhor explicam os atuais dados observacionais, além de precisarem ser

coerentes com os mais recentes dados do WMAP. Tais trabalhos certamente excluirão diversos modelos cosmológicos, e aumentarão nosso conhecimento sobre a formação das estruturas no universo.

CrITÉRIOS estatísticos mais poderosos poderão ser usados na análise dos aglomerados de galáxias. Diversas análises estatísticas serão empregadas no mesmo problema, para verificarmos se a adequação do modelo aos dados é um problema do modelo cosmológico empregado ou do tratamento estatístico escolhido. Ainda submeteremos trabalhos sobre formação de estruturas, incluindo comparações diretas com os mais recentes dados computacionais (simulações massivas de N-Corpos), do espectro de potências e da função de massa; pretendemos com isso verificar se nosso modelo PL, o de Burr, ou ainda o da k -exponencial, seriam mais efetivos que os de Sheth-Tormen[144, 234] para corrigir os ajustes em relação ao modelo original de PS.

No ano de 2008 o satélite Planck será lançado, e em 2010 fornecerá ao mundo os dados cosmológicos mais recentes e precisos jamais vistos até então. Pretendemos em um futuro bem próximo focar nossa atenção em análises profundas desses dados, utilizando todo o arcabouço teórico desenvolvido acima, e comparando aos dados anteriores, e também às observações independentes de outras fontes. Muitos trabalhos serão desenvolvidos nessa linha, no espírito dos desenvolvimentos anteriores. Certamente deveremos descartar vários modelos, assim como iremos apontar os mais aptos a explicar o paradigma cosmológico atual. O objetivo básico é obter uma melhor compreensão da formação de estruturas e, conseqüentemente, do comportamento da matéria escura e da energia escura no universo.

Apêndice A

Não Extensividade na Sonda de Plasma

A.1 Introdução

A estatística de BG é válida apenas para interações de alcance suficientemente curto. Ela falha quando campos gravitacionais ou Coulombianos estão presentes, e esse é precisamente o caso de um plasma. Precisamos notar que vários trabalhos experimentais em tecnologia de superfície e revestimento (deposição por bombardeamento de plasma, técnicas de sonda de cátodo oco, estatísticas de colisão em cascata do bombardeamento por um feixe de íons, etc.) apresentam uma grande diferença entre os dados do plasma obtidos e a expectativa teórica (usando a estatística de BG)[194, 195, 196]; Baseados nessa evidência, e também baseados em vários trabalhos teóricos recentes sobre o assunto[31, 32] podemos inferir que a sonda de plasma iria descrever melhor o comportamento do sistema se os dados fossem analisados sob a ótica da estatística não extensiva.

Investigaremos aqui as conseqüências de uma função distribuição não extensiva em uma sonda de plasma, na presença de um campo de força externo de potencial $V(\mathbf{r})$. Mostraremos que essa teoria cinética não extensiva explica os dados da sonda de plasma, para um dado parâmetro q , cobrindo uma região de dados nunca explicada teoricamente pela cinética clássica de Boltzmann-Gibbs (BG). Esse resultado irá melhorar certamente o diagnóstico dos processos a plasma, com evidentes aplicações em astrofísica observacional.

A.2 A Sonda de Langmuir - Aparato Experimental

A sonda de Langmuir representa um meio relativamente simples de se caracterizar eletricamente descargas luminescentes. As informações obtidas por esta técnica são de suma importância para a caracterização dos processos ocorrendo no plasma.

Essencialmente, plasmas são constituídos por portadores de carga positivos e negativos, cujas concentrações são, a priori, iguais. Esta é a condição de neutralidade da descarga. Elétrons são espécies muito móveis se comparados aos íons e, sob a ação de campos elétricos, são prontamente acelerados. Colisões inelásticas entre elétrons e moléculas ou átomos dos gases presentes são os principais responsáveis pela geração e manutenção da descarga. Assim, a variação na densidade e/ou energia média destas espécies na descarga influencia processos como a deposição de filmes, limpeza de superfícies ou tratamentos a plasma. Portanto, o conhecimento de como condições externas do processo afetam os parâmetros intrínsecos do plasma permite um melhor entendimento dos mecanismos envolvidos no processo e, conseqüentemente, determinar as melhores condições experimentais.

Essencialmente uma sonda de Langmuir é um pequeno eletrodo, geralmente um fio de tungstênio ou platina, inserido no plasma e conectado a uma fonte capaz de polarizá-lo com tensões positivas e negativas em relação ao plasma. A partir da medida da corrente coletada pela ponta em função do potencial aplicado pode-se obter informações como densidade e energia médias dos portadores de carga e potenciais, de plasma e flutuante, na vizinhança da sonda.

A Fig. A.1 ilustra uma montagem típica de um experimento com uma sonda de Langmuir. Nesta figura, V_B representa a diferença de potencial elétrico entre a superfície da sonda e um eletrodo de referência em contato com o plasma; é a tensão de polarização gerada pela fonte.

Esta diferença de potencial é composta por duas partes: a queda de potencial V_{SP} , também chamada de potencial de plasma ou espacial, entre o eletrodo de referência e a bainha formada ao redor da sonda e o potencial da superfície da sonda com relação à borda da bainha, V_P . Ou seja,

$$V_B = V_{SP} + V_P \quad (\text{A.1})$$

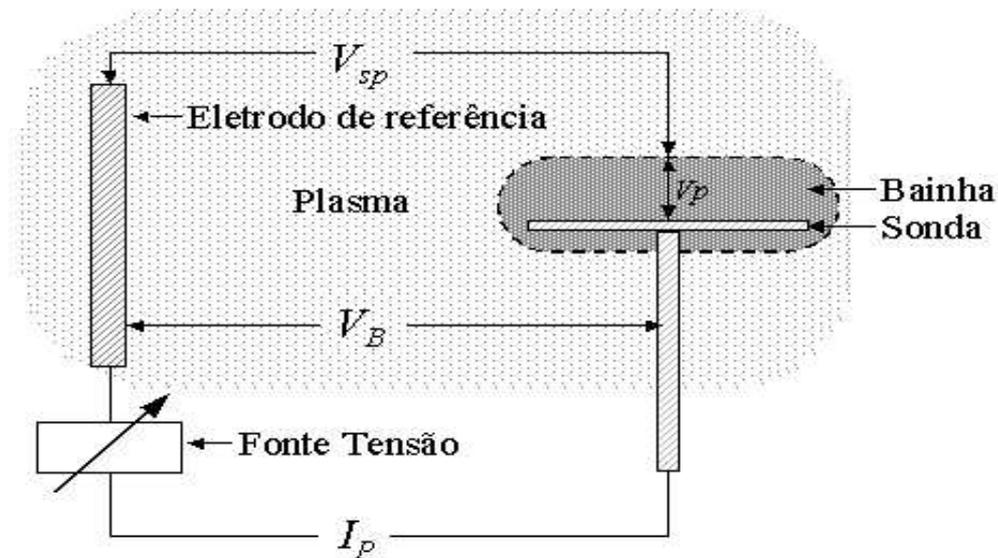


Figura A.1: A sonda de Langmuir.

Um gráfico característico da corrente em função da tensão de polarização de uma sonda simples é mostrado na Fig. A.2. O comportamento qualitativo desta curva pode ser mais claramente entendido se ela for dividida nas três regiões indicadas por A, B e C.

Segundo a Eq. (A.1), quando o potencial aplicado à sonda é igual a V_{SP} , ela se encontra no mesmo potencial do plasma. Em tal situação não existem campos elétricos acelerando as partículas carregadas (íons e elétrons) e elas atingem a sonda apenas por agitação térmica. Como os elétrons se movem muito mais rapidamente que os íons, que têm massas muito maiores, a corrente coletada é predominantemente eletrônica. Quando o potencial é feito positivo com relação ao plasma, os elétrons são acelerados em direção à ponta. Além disto, os íons são repelidos e a pequena corrente iônica presente em V_{SP} se anula. Próximo à superfície da sonda ocorre um excesso de cargas negativas, que continua crescendo até que a carga negativa total seja igual à carga positiva na sonda. Esta camada de carga, a bainha, é geralmente muito fina e age como uma blindagem fazendo com que fora dela praticamente não existam campos elétricos e o plasma não seja perturbado. A corrente eletrônica é então aquela devida a elétrons que entram na bainha por movimentos térmicos aleatórios. Como a área da bainha é relativamente constante à medida que a

tensão na sonda é aumentada, tem-se a região aproximadamente constante chamada de região de saturação da corrente eletrônica indicada na figura pela letra A.

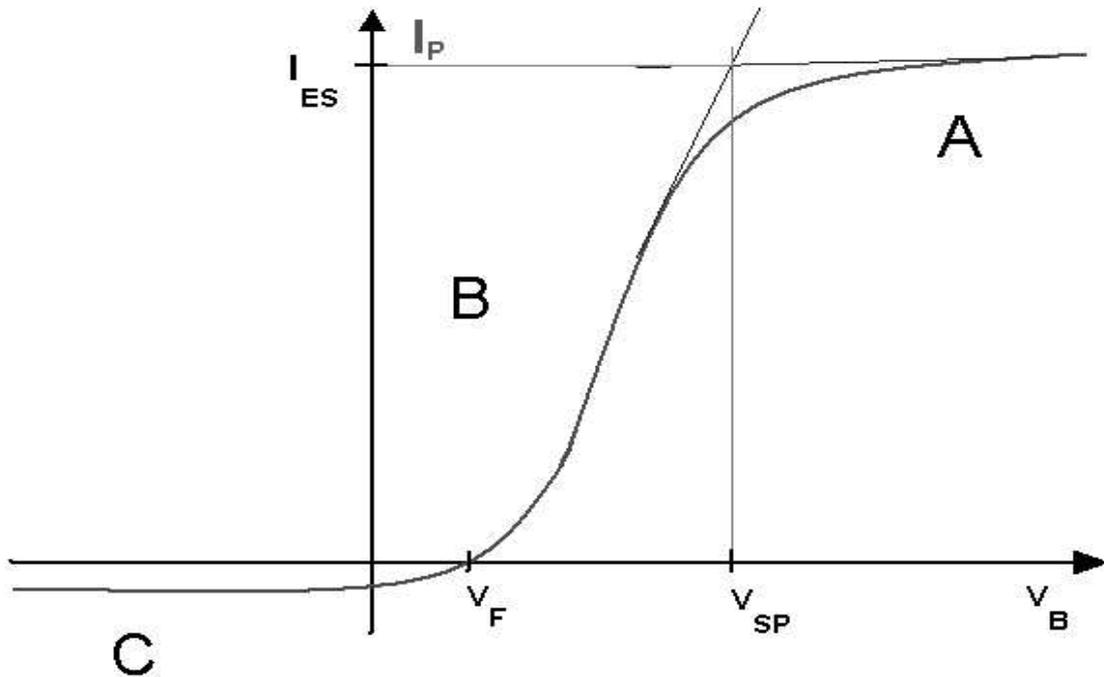


Figura A.2: Curva caracterstica de uma sonda de Langmuir.

Por outro lado, se o potencial na sonda é feito negativo com relação à V_{SP} , elétrons começam a ser repelidos enquanto os íons passam a ser acelerados. Assim, na região B, a região de transição, a corrente eletrônica diminui com o decréscimo de V_B . A forma da curva nesta região, para distribuições Maxwellianas de energia dos elétrons e subtraída a contribuição da corrente iônica, é uma exponencial. Finalmente, em V_F , o chamado potencial flutuante, a sonda se encontra em um potencial suficientemente negativo para repelir todos os elétrons exceto a um fluxo igual ao de íons. A corrente total nesta situação é portanto nula. É interessante comentar que um eletrodo isolado inserido em um plasma assume este potencial.

Para valores muito negativos de V_B , como na região C, praticamente todos os elétrons são repelidos e tem-se uma bainha e uma corrente de saturação iônicas. Esta região é semelhante à região A exceto pela diferença na amplitude das correntes. Isto se deve principalmente ao fato que as temperaturas iônica e eletrônica não são iguais e a formação da bainha é diferente quando espécies mais frias ou mais quentes são coletadas pela sonda.

As descargas em um aparato chamado Cátodo Oco (*Hollow cathode*) são capazes de gerar plasmas densos e têm sido usadas para o desenvolvimento de máquinas de processamento de alta eficiência e baixa pressão. O objetivo dos estudos do aparato é, em geral, obter observações experimentais sobre as características principais das descargas DC de um Cátodo Oco, de modo a avaliar sua capacidade de gerar componentes no meio do plasma, através das reações entre as espécies bombardeadas do cátodo e os radicais vindos das descargas do gás. O Cátodo Oco consiste de duas placas paralelas de alumínio, e o gás usado nas descargas é comumente uma mistura de Argônio e Nitrogênio, com as pressões variando em geral de 10 a 50 Pa. Uma bobina de Helmholtz é também usada, para produzir (quando necessário para o projeto) um campo magnético uniforme e de baixa intensidade ao longo do eixo da descarga, com alcance de $(0 - 30) \cdot 10^{-3}$ T. A voltagem da descarga tem o alcance de 300 a 900 V, correspondendo a correntes entre 10 e 800 mA. Tais parâmetros são em geral empregados para estudos da deposição de filmes finos, mas a flexibilidade do aparato é bastante extensa, possibilitando estudos de diversas variações das condições internas do plasma.

As propriedades do plasma são inferidas das características de corrente-voltagem de uma única sonda de Langmuir posicionada no espaço interno do aparato.

Neste trabalho foi utilizada uma sonda eletrostática cilíndrica, que consiste de um condutor metálico de tungstênio, com 0,1 mm de diâmetro, revestido por um tubo de vidro e uma *insulata* (missanga) de cerâmica. A área efetiva de coleta do condutor, cujo comprimento da superfície de coleta é de 3 mm, é de $9,42 \cdot 10^{-7}$ m².

A sonda está fixada a um mecanismo de movimentação que permite o seu deslocamento vertical e radial, o que nos possibilita fazer varreduras ao longo de todo o cátodo, bem como ao longo do contorno das peças nitretadas (se for o caso). Este mecanismo de movimentação nos permite uma variação do posicionamento numa escala de 1 mm, tanto para os deslocamentos verticais quanto para os horizontais.

As curvas características foram obtidas digitalmente, através de um sistema de aquisição de dados acoplado a uma fonte de polarização (*bias*), com variação de -65 a +65 V. Todos os processos foram realizados à pressão de 300 Pa, durante um intervalo de 3 horas, em uma atmosfera gasosa composta de 80% H₂ (H₂ + N₂) com fluxo de 10 sccm (MFC - *Mass Flux Controller*).

A.3 A Sonda de Plasma - Caso Extensivo

Uma expressão aproximada para a magnitude da densidade de corrente eletrônica, longe da região de saturação, pode ser obtida da Eq. (A.10) como

$$J_e = J_{e0} \exp \left[\frac{e\phi}{k_B T_e} \right], \quad (\text{A.2})$$

onde J_{e0} é a densidade de corrente eletrônica quando o potencial elétrico, ϕ , é zero. Quando ϕ é negativo, os íons que alcançam a bainha do plasma continuam a cair no potencial negativo da sonda, e teremos uma densidade de corrente iônica constante (J_i) na região de potencial negativo. Assim a densidade de corrente na sonda quando $\phi < 0$ é

$$J_p = J_{e0} \exp \left[\frac{e\phi}{k_B T_e} \right] - J_i. \quad (\text{A.3})$$

Se tomarmos o logarítmo em ambos os lados da Eq. (A.3) teremos

$$\ln(J_p + J_i) = \ln(J_{e0}) + \left(\frac{1}{T_{BG} [ev]} \right) \phi. \quad (\text{A.4})$$

Se plotamos $\ln(J_p + J_i)$ como uma função de ϕ , a curva gerada terá uma seção em linha reta, correspondendo ao potencial da sonda menor do que o potencial do plasma (acredita-se que esta região seja bem descrita pela estatística de BG), seguida por um “joelho”, e após ele uma região onde o potencial do plasma domina e não pode ser descrita pela teoria padrão de BG. O problema é que experimentalmente a primeira seção, antes do “joelho”, contém ruídos que interferem com nossos dados, prejudicando o diagnóstico do plasma. Com a estatística não extensiva, vamos mostrar que podemos descrever o comportamento do plasma da segunda seção da curva (após o “joelho”), permitindo um melhor conhecimento do sistema como um todo. Como uma última observação, podemos obter a temperatura de BG T_{eBG} do “joelho” dessa curva, usando a derivada da Eq. (A.4):

$$T_{BG} = \left(\frac{d \ln(J_p + J_i)}{d\phi} \right)^{-1}. \quad (\text{A.5})$$

A.3.1 A Sonda de Plasma - Caso Não Extensivo

Usando o mesmo procedimento, podemos derivar a densidade de corrente eletrônica não extensiva a partir da Eq. (A.11) (daqui para a frente usaremos a conhecida notação

PL, para lei de potências - *Power Law*). Assim a densidade de corrente PL da sonda, quando $\phi < 0$ é

$$J_p = J_{e0} \left[1 + (1 - q) \frac{e\phi}{k_B T_e} \right]^{(5-3q)/2(1-q)} - J_i, \quad (\text{A.6})$$

e novamente aplicando o logaritmo em ambos os lados teremos

$$\ln(J_p + J_i) = \ln(J_{e0}) + \left(\frac{5 - 3q}{2(1 - q)} \right) \ln \left(1 + (1 - q) \frac{1}{T_{PL} [ev]} \right) \phi. \quad (\text{A.7})$$

Podemos facilmente notar uma relação evidente entre T_{PL} e T_{BG} derivando a Eq. (A.7), se considerarmos que $e\phi \ll k_B T_e$. Assim

$$T_{PL} = \left(\frac{5 - 3q}{2} \right) \cdot T_{BG}. \quad (\text{A.8})$$

Com a Eq. (A.8) e sabendo que o parâmetro q da distribuição PL está entre $[1/3 \leq q < 1]$ se $q < 1$, e entre $[1 < q < 2]$ se $q > 1$, então

$$0 < \frac{\Delta T}{T_{BG}} < 1, 5. \quad (\text{A.9})$$

o que fornece, certamente, conclusões teóricas ainda a serem massivamente testadas, experimentalmente.

A.4 A Densidade dos Elétrons

Consideramos nesta sub-seção a derivação da densidade de elétrons para a aproximação não extensiva, e comparamos o resultado com o tratamento Maxwelliano.

Antes de prosseguirmos seria interessante relembrarmos dois importantes resultados mostrados na seção 4.2 do capítulo 4: a densidade numérica das partículas, $n(\mathbf{r}) = \int \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \mathbf{d}^3\mathbf{v}$, no caso extensivo foi deduzida como sendo

$$n(r) = n_0 \exp \left[-\frac{U(r)}{k_B T} \right], \quad (\text{A.10})$$

e no caso não extensivo foi mostrado que ela era igual a

$$n(r) = n_0 \left[1 - (1 - q) \frac{U(r)}{k_B T} \right]^{(5-3q)/2(1-q)}, \quad (\text{A.11})$$

sendo que no limite $q \rightarrow 1$ a expressão extensiva padrão para $n(\mathbf{r})$ é prontamente recuperada.

A densidade de corrente das partículas (ou fluxo de partículas) é definida como o número de partículas passando através de uma dada superfície, por unidade de área e por unidade de tempo. Uma vez que assumimos que a velocidade média é zero, o fluxo será também zero. Neste caso, é de interesse considerarmos apenas o fluxo de partículas que atravessa a superfície pelo mesmo lado, devido a seus movimentos randômicos. Usando coordenadas esféricas podemos derivar o fluxo de partículas como[139]

$$F = \pi \int_0^\infty f(v) \cdot v^3 dv \quad (\text{A.12})$$

Se usamos a distribuição de velocidades Maxweliana da Eq. (4.27) na Eq. (A.12) obtemos

$$F_{BG} = n_o \left(\frac{k_B T}{2\pi m} \right)^{1/2} \quad (\text{A.13})$$

Uma vez que a distribuição Maxweliana é isotrópica, a Eq. (A.13) se aplica a qualquer direção dentro do gás. Note que o fluxo randômico de partículas é inversamente proporcional à raiz quadrada da massa da partícula; então a densidade eletrônica do plasma será muito maior do que a de íons, e tal propriedade tem um papel fundamental na interação de um plasma com um corpo material imerso neste[139].

Se usamos, ao invés disso, a distribuição não extensiva no intervalo $1/3 < q < 1$ da Eq. (4.33), com a correspondente normalização, teremos

$$F_q = F_{BG} \cdot \left(\frac{5-3q}{2} \right) \left(\frac{3-q}{2} \right) \left(\frac{1}{3-2q} \right) \left(\frac{1}{2-q} \right) (1-q)^{1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1-q}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right)} \quad (\text{A.14})$$

Podemos então ver facilmente que F_q tende a F_{BG} no limite $q \rightarrow 1$. Quando calculamos o fluxo de partículas usando a distribuição não extensiva no intervalo $q > 1$ nós achamos

$$F_q = F_{BG} \cdot \left(\frac{1}{q-1} \right)^{1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1} - 2\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \frac{3}{2}\right)} \quad (\text{A.15})$$

que também tende a F_{BG} se $\left(\frac{1}{q-1}\right) \gg 3/2$ no limite $q \rightarrow 1$.

Da densidade de corrente da sonda (Eqs. (A.3) e (A.6)) temos J_{e0} , a densidade de corrente eletrônica quando o potencial elétrico é nulo. Desse modo

$$J_{e0} = e \cdot F \quad (\text{A.16})$$

onde F é F_{BG} para a distribuição Maxweliana, e F_q para a não extensiva. Cada fluxo de partículas está em função da quantidade n_o , que é a densidade numérica dos elétrons na região do plasma não perturbado. Podemos assim derivar a densidade numérica dos elétrons para a distribuição Maxweliana como sendo

$$n_{oBG} = \frac{J_{e0}}{e} \left(\frac{2\pi m_e}{k_B T_e} \right)^{1/2} \quad (\text{A.17})$$

e usando o mesmo procedimento derivamos a densidade numérica dos elétrons para a distribuição não extensiva no intervalo $1/3 < q < 1$:

$$n_{oq} = n_{oBG} \cdot \left(\frac{2}{5-3q} \right) \left(\frac{2}{3-q} \right) (3-2q)(2-q) \left(\frac{1}{1-q} \right)^{1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1-q}\right)} \quad (\text{A.18})$$

e finalmente, usando a distribuição não extensiva no intervalo $q > 1$ nós obtemos

$$n_{oq} = n_{oBG} \cdot (q-1)^{1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1} - 2\right)} \quad (\text{A.19})$$

A.5 Resultados Básicos

A temperatura dos elétrons é obtida dos dados da sonda usando as Eqs. (A.5) e (A.8). Com essa temperatura podemos quantificar a densidade de elétrons do plasma usando as Eqs. (A.17), (A.18) e (A.19). Na Fig. A.3 e Fig. A.4 podemos ver os resultados de BG (Boltzmann-Gibbs) e de PL (Power Law, não extensivo) para a densidade eletrônica, onde fixamos o valor de J_{e0} ($J_{e0} = 0,792$ Ampères), em função da temperatura dos elétrons (a correção da Eq. (A.8) para a temperatura PL é feita em todas as curvas PL). Na Fig. A.3 vemos as curvas para $q > 1$ (onde um limite superior de $q \cong 1,5$ é obtido da derivação matemática da Eq. (A.15)), e na Fig. A.4 vemos as curvas PL no intervalo $1/3 < q < 1$.

Na Fig. A.5 mostramos comparações entre os dados da sonda do plasma e o comportamento teórico das curvas de BG e PL, variando o parâmetro q dessa última. A linha

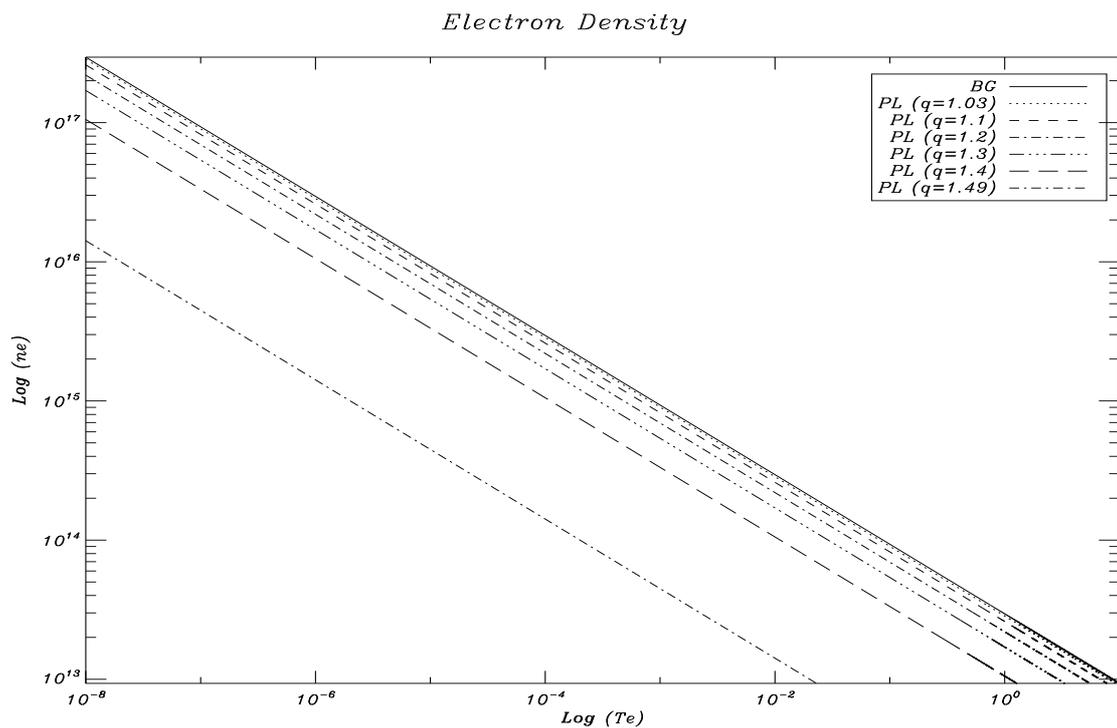


Figura A.3: Os resultados de BG (Boltzmann-Gibbs) e de PL (Power Law, não extensivo) para a densidade eletrônica, onde fixamos o valor de J_{e0} ($J_{e0} = 0,792$ Ampères), em função da temperatura eletrônica. No intervalo $q > 1$.

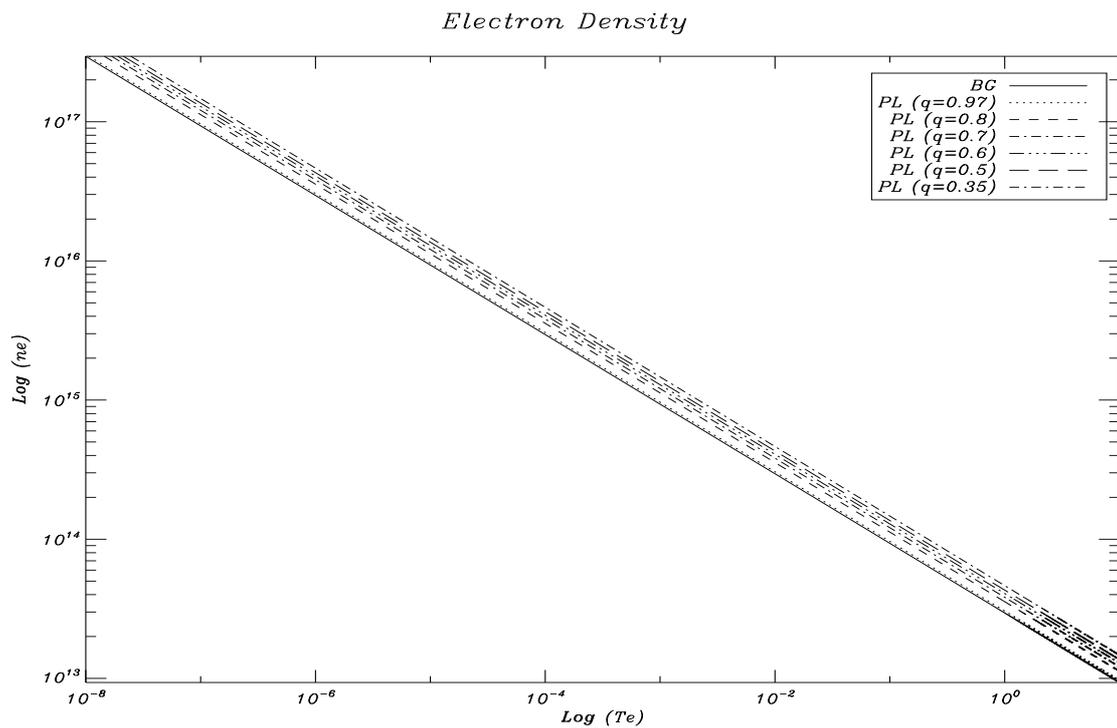


Figura A.4: Os resultados de BG (Boltzmann-Gibbs) e de PL (Power Law, não extensivo) para a densidade eletrônica, onde fixamos o valor de J_{e0} ($J_{e0} = 0,792$ Ampères), em função da temperatura eletrônica. No intervalo $1/3 < q < 1$.

sólida grossa é a predição de BG da Eq. (A.4); vemos que em ambos os painéis devemos deslocar para cima a curva BG, por um mesmo fator, para efetivamente compararmos a curva aos dados experimentais. A curva deslocada de BG é mostrada como uma linha tracejada grossa. Todas as linhas finas são curvas de PL com diferentes parâmetros q , que vão de $q = 1,01$ até $q = 1,6$ na direção de baixo para cima (após $q = 1,65$ cessamos de obter resultados). Notamos em ambos os painéis que a curva deslocada de BG se ajusta bem à linha reta antes do “joelho”, na curva dos dados experimentais (onde o potencial da sonda é menor que o potencial do plasma, atraindo por isso mais íons; a velocidade e as colisões das partículas nesta região fazem com que a cinética se sobreponha ao comportamento típico dos plasmas), mas tal curva é completamente incapaz de ajustar-se a qualquer dado experimental na região após o “joelho”, onde o comportamento do plasma é mais forte. As curvas PL mostram em ambos os painéis que com um $q \sim 1,6$ podemos descrever todos os pontos experimentais na região após o “joelho” (e, como bônus, sem a necessidade de deslocarmos a curva, como devemos fazer no caso da curva de BG).

Na Fig. A.6 mostramos essencialmente a mesma coisa, mas agora notamos que no painel superior a curva PL em $q = 1,6$ começa a ser incapaz de dar uma boa descrição do comportamento experimental após o “joelho”, e no painel inferior vemos que a curva PL não se ajusta de modo algum aos dados experimentais, ao passo que a curva de BG fornece um belo ajuste aos mesmos dados (descontando o fato de que devemos usar o procedimento do deslocamento da curva para cima, ainda aqui, e pior ainda, tal deslocamento é diferente do usado na Fig. A.5). O comportamento de ambas as curvas teóricas é, no entanto, fisicamente esperado. A distância da sonda ao cátodo no painel superior coloca a sonda no limite da bainha de plasma que envolve a base (onde o material é tratado); e a distância da sonda no painel inferior é ainda mais próxima da base, ou seja, a sonda está completamente imersa na bainha de plasma do cátodo (que envolve a base e também a amostra de material tratada). Em ambos os painéis o comportamento do plasma é varrido pela cinética das partículas presentes (no painel inferior podemos facilmente ver que o comportamento do plasma é sobrepujado completamente pelo movimento randômico apresentado pelas partículas locais, e sabemos que a teoria de BG é realmente bastante efetiva nesses tipos de regime de forte caoticidade).

Assim, na Fig. A.5 e na Fig. A.6, mostramos o comportamento teórico esperado para

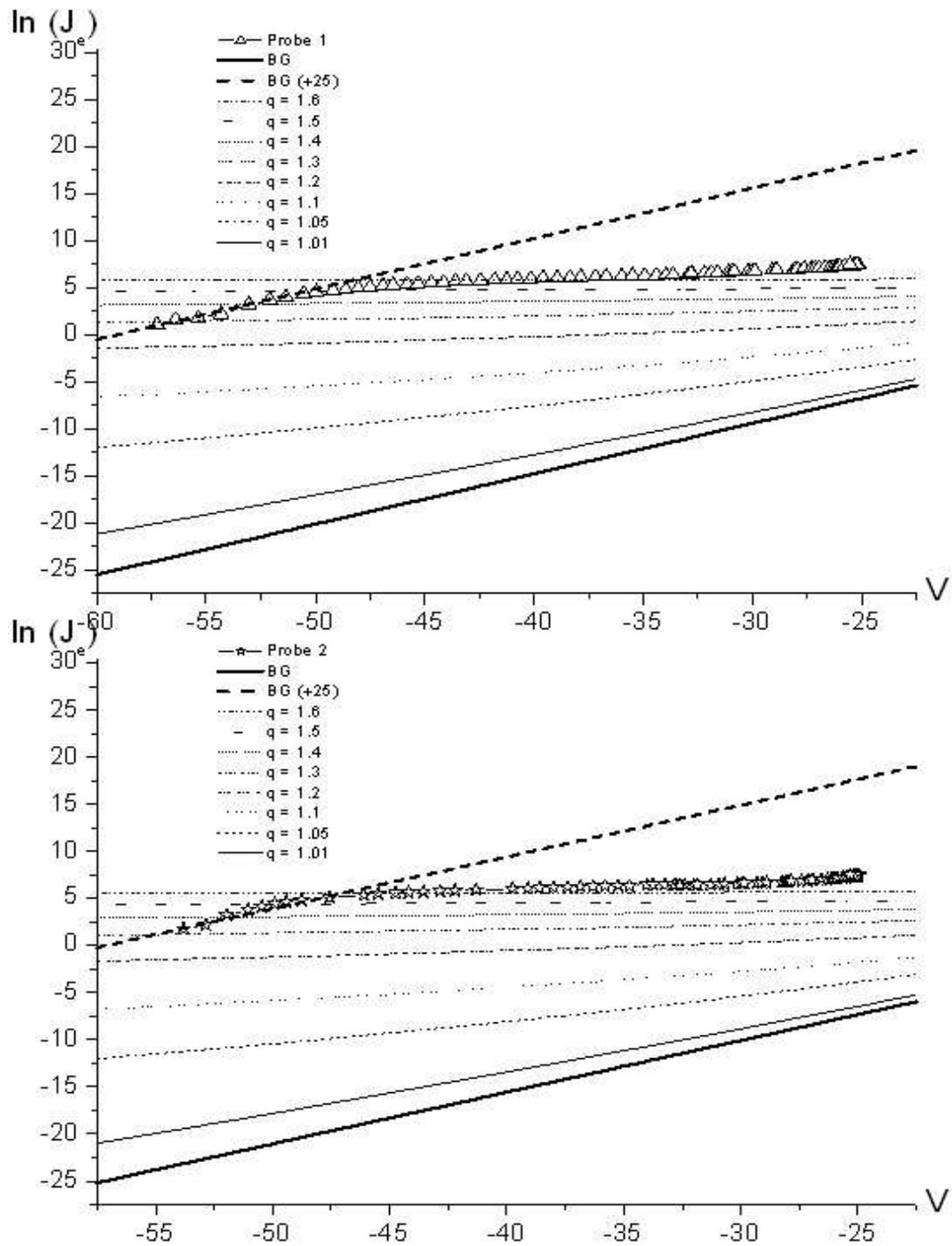


Figura A.5: Sonda do lado de fora da bainha de plasma do cátodo. Região de interações Coulombianas de longo alcance, baixo caos, comportamento de plasma. A curva PL com $q = 1,6$ explica muito bem a região após a dobra de joelho nos dados da sonda (onde o potencial da sonda é sobrepujado pelo potencial do plasma). Esta curva PL descreve a região de fora da bainha *da sonda*, onde podemos detectar as variáveis macroscópicas *reais* do plasma (temperatura, pressão, densidade, etc.), e nem precisamos deslocar a curva para isso, como devemos fazer no caso padrão de BG.

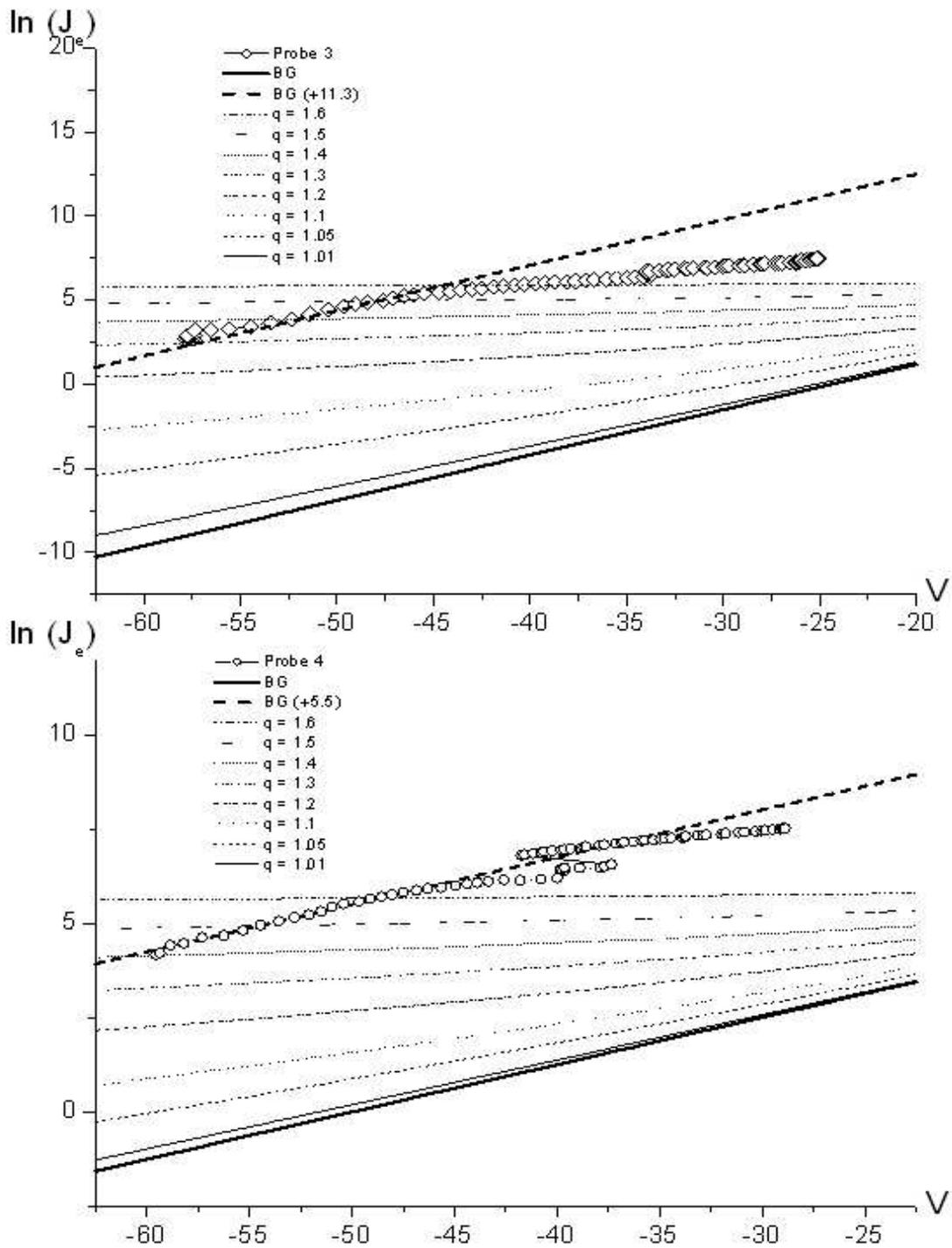


Figura A.6: Sonda dentro da bainha de plasma do cátodo. Região de interações colisionais de curto alcance, forte caos, comportamento cinético randômico. A curva de BG explica muito bem os dados, especialmente no painel inferior, onde a sonda está completamente imersa na região da bainha do cátodo (mas um parâmetro de deslocamento para cima é necessário em ambos os painéis, e ainda com diferentes valores para cada um).

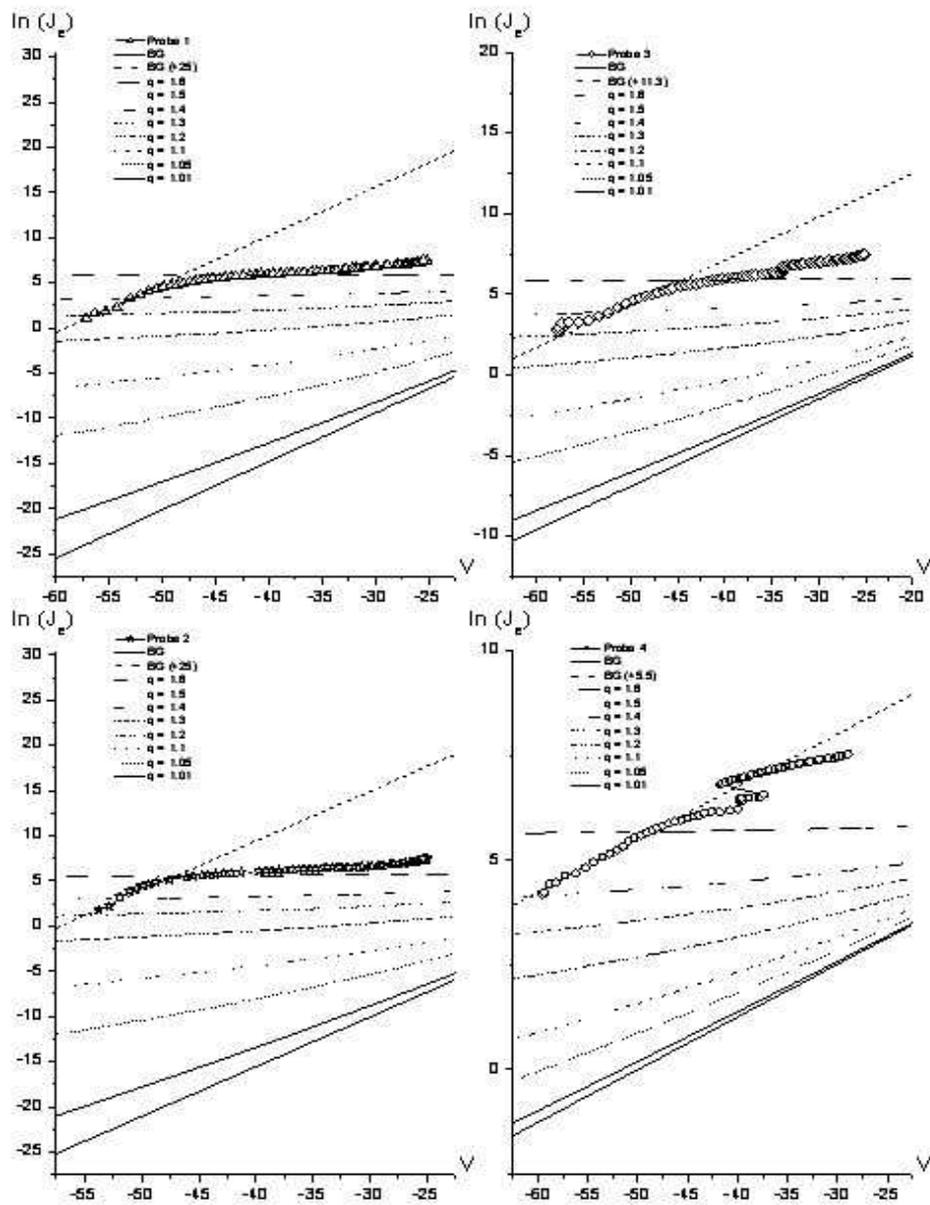


Figura A.7: A primeira coluna mostra a região do lado de fora da bainha de plasma do cátodo. A segunda coluna mostra a região dentro da bainha.

ambas as curvas de BG e PL. Na Fig. A.6, dentro da bainha da base, o deslocamento randômico das partículas é característico de forte caoticidade (interações colisionais de curto alcance, melhor explicadas pela teoria de BG), de modo que a curva de BG descreve melhor os dados experimentais neste caso; enquanto que na Fig. A.5 vemos que, fora da bainha da base, onde o comportamento do plasma é mais forte (interações Coulombianas de longo alcance das partículas), a curva PL em $q = 1,6$ é a mais apta a explicar os dados.

A vantagem de usarmos a curva de PL em relação à de BG é que podemos descrever a região do lado de fora da bainha *da sonda*, onde podemos detectar as variáveis macroscópicas *reais* do plasma (temperatura, pressão, densidade, etc.), e não precisamos deslocar a curva para obtermos bons resultados, como é o caso da curva de BG. Assim, mostramos que a teoria não extensiva pode realmente melhorar o diagnóstico do plasma, usando a técnica da sonda de plasma.

Bibliografia

- [1] Riess A.G. *et al.*, ApJ 607, 665 (2004).
- [2] Astier P. *et al.*, A&A 447, 31 (2006).
- [3] Allen S.W. *et al.*, MNRAS, 353, 457 (2004).
- [4] Spergel D.N., Verde L., Peiris H.V. *et al.*, ApJS 148, 175 (2003).
- [5] Spergel D.N., Bean R., Doré O. *et al.*, [astro-ph/0603449] (2006); Hinshaw G., Nolta M.R., Bennett C.L. *et al.*, [astro-ph/0603451] (2007).
- [6] Press W.H. & Schechter P., ApJ 187, 425 (1974).
- [7] Bond J.R., Cole S., Efstathiou G., Kaiser N., ApJ 379, 440 (1991).
- [8] Lee J. & Shandarin S.F., ApJ 517L, 5L [astro-ph/9811004] (1999).
- [9] Reed D.S. *et al.*, AAS/AAPT *Joint Meeting, American Astronomical Society Meeting* 209, 197.04 [astro-ph/0607150] (2007).
- [10] Reiprich T.H. & Boehringer H., ApJ 567, 716 (2002).
- [11] Tsallis C., J. Stat. Phys. 52, 479 (1988).
- [12] Plastino A.R. & Plastino A., Physics Lett. A 174, 384 (1993).
- [13] Lima J.A.S. & de Souza R.E., Physica A 350, 303 (2005).
- [14] Lima, J. A. S., Silva R. & Santos, J., PRE 61, 3260 (2000).
- [15] Silva R., Alcaniz J. S. & Lima J. A. S., Physica A 356, 419 (2005).
- [16] Alemany P.A. & Zanette D.H., PRE 49, R956 (1994).

- [17] Tsallis C., Levy S.V.F., Souza A.M.C. & Maynard R., PRL 75, 3589 (1995) [Erratum: 77, 5442 (1996)]; Zanette D.H. & Alemany P.A., PRL 75, 366 (1995); Zanette D.H. & Alemany P.A., PRL 77, 2590 (1996); Prato D. & Tsallis C., PRE60, 2398 (2000).
- [18] Kaniadakis G., Lavagno A. & Quarati P., Phys. Lett. B 369, 308 (1996); Kaniadakis G., Lavagno A. & Quarati P., Astroph. & Space Sci. 258, 145 (1998).
- [19] Lavagno A., Kaniadakis G., Rego-Monteiro M., Quarati P. & Tsallis C., Astroph. Let. & Comm. 35, 449 (1998).
- [20] Tsallis C., Chaos, Solitons and Fractals 6, 539 (1995).
- [21] Landsberg P.T., “*Thermodynamics and Statistical Mechanics*”, Oxford university Press, Oxford, (1978) [also Dover, New york, 1990].
- [22] Cohen E.G.D., Physica A 305, 19 (2002).
- [23] Baranger M., Physica A 305, 27 (2002).
- [24] Lima J.A.S., Silva R. & Santos J., A&A 396, 309 (2002); Silva R. & Alcaniz. J.S., Phys. Lett. A 313, 393 (2003); Hansen S.H., New Astron. 10, 371 (2005); Hansen S.H. *et al.*, New Astron. **10**, 379 (2005.); Jiulin D., Eur. Lett. 67, 893 (2004).
- [25] Seto N., ApJ 553, 488S (2001).
- [26] Robinson J., Gawiser E. & Silk J., ApJ 532, 1 (2000).
- [27] Andrade A.P.A., Wuensche C.A., Ribeiro A.L.B., ApJ 602, 555A (2004).
- [28] Kronberger T., Leubner M.P. & Van Kampen E., A&A 453, 21K (2006).
- [29] Leubner I.H., AGUSM, P21D, 01L (2005).
- [30] Bernui A., Tsallis C. & Villela T., [astro-ph/0512267] (2005).
- [31] Lima J.A.S. & Marassi L., IJMPD 13, 1345 (2004).
- [32] Marassi L. & Lima J.A.S., IJMPD 16, 445 (2007).
- [33] Marassi L. & Lima J.A.S., MNRAS, submetido (2007).

- [34] Cunha J.V., Marassi L. & Santos R.C., IJMPD 16, 403, [astro-ph/0608686] (2007).
- [35] Cunha J.V., Marassi L. & Lima J.A.S., MNRAS 379, L1-L5 (doi:10.1111/j.1745-3933.2007.00322.x), [astro-ph/0611934] (2007).
- [36] Weinberg S., “*Gravitation and Cosmology*”, John Wiley & Sons (1972).
- [37] Carroll S.M., Press W.H. & Turner E.L., Ann. Rev. Astron. Astrophys. 30, 499 (1992).
- [38] Kolb E.W. & Turner M.S., “*The Early Universe*”, Redwood City, California: Addison-Wesley (1990).
- [39] Peebles P.J.E., “*Principles of Physical Cosmology*”, Princeton U.P. (1993).
- [40] Olive K.A., Steigman G. & Walker T.P., PhR, 333, 389 (2000).
- [41] Burles S., Nollett K.M., Truran J.N., Turner M.S., PRL 82, 4176, [astro-ph/9901157] (1999).
- [42] Carroll S.M., Living Rev. Relativity 4, 1 [Online article]: <http://www.livingreviews.org/Articles/Volume4/2001-1carroll/> (2001).
- [43] Abramo L.R., Brandenberger R.H. & Mukhanov V.F., PRD 56, 3248 (1997).
- [44] Masiero A., Pietroni M. & Rosati F., PRD 61, 023504, [hep-ph/9905346] (2000).
- [45] Binetruy P., PRD 60, 063502, [hep-ph/9810553] (1999).
- [46] Kakushadze Z. & Tye S.H., Nucl. Phys. B 548, 180, [hep-th/9809147] (1999).
- [47] Bento M.C. & Bertolami O., Gen. Relativ. Gravit. 31, 1461, [gr-qc/9905075] (1999).
- [48] Wang L., Caldwell R.R., Ostriker J.P. & Steidhardt P.J., ApJ 530, 17 (2000).
- [49] Caldwell R.R., Dave R., Steinhardt P.J., Astroph. & Space sci. 261, 303 (1998a).
- [50] Caldwell R.R., Dave R., Steinhardt P.J., PRL 80, 8 (1998b).
- [51] Caldwell R.R., [astro-ph/9908168] (1999) (ainda não publicado); Caldwell R.R., sddm.symp, 74C (2001).

- [52] Chiba T., Sugiyama N. & Nakamura T., MNRAS 301, 72, [astro-ph/9806332] (1998).
- [53] Ratra B. & Quillen A., MNRAS 259, 738 (1992).
- [54] Perlmutter S., Turner M.S. & White M., PRL 83, 670, [astro-ph/9901052] (1999).
- [55] Peebles P.J. & Ratra B., ApJ 325, L17 (1988).
- [56] Ratra B. & Peebles P.J., PRD 37, 3406 (1988).
- [57] Caldwell R.R., Dave R. & Steinhardt P.J., PRL 80, 1582, [astro-ph/9708069] (1998).
- [58] Peebles P.J. & Vilenkin A., PRD 59, 063505, [astro-ph/9810509] (1999).
- [59] Felder G., Kofman L. & Linde A., PRD 60, 103505, [hep-ph/9903350] (1999).
- [60] Freedman W.L. *et al.*, ApJ 553, 47F (2001).
- [61] Grogin N.A. & Narayan R., ApJ 464, 92, [astro-ph/9512156] (1996).
- [62] Birkinshaw M., Phys. Rep. 310, 97, [astro-ph/9808050] (1999).
- [63] Bonamente M. *et al.*, ApJ 647, 25 (2006).
- [64] Copi C.J. & Schramm D.N., Comm. Nucl. Part. Phys. 22, 1, [astro-ph/9504026] (1996).
- [65] Carlberg R.G. *et al.*, ApJ 462, 32 (1996).
- [66] Bahcall N.A. & Fan X., Publ. Nat. Acad. Sci. 95, 5956, [astro-ph/9804082] (1998).
- [67] Bahcall N.A., Lubin L.M. & Dorman V., ApJ 447, L81, [astro-ph/9506041] (1995).
- [68] Freeman K.C., ApJ 160, 811 (1970).
- [69] Begeman K.G., Broeils A.H. & Sanders R.H., MNRAS 249, 523 (1991).
- [70] White S.D.M., Navarro J.F., Evrard A.E. & Frenk C.S., Nature 366, 429 (1993).
- [71] Fukugita M., Hogan C.J. & Peebles P.J., ApJ 503, 518, [astro-ph/9712020] (1998).
- [72] Sarazin C.L., Rev. Mod. Phys. 58, 1 (1986).

- [73] Mohr J., Mathiesen B. & Evrard G., ApJ 517, 627, [astro-ph/9901281] (1999).
- [74] Peacock J.A. & Dodds S.J., MNRAS 267, 1020, [astro-ph/9311057] (1994).
- [75] Liddle A.R., Lyth D.H., Viana P.T. & White M., MNRAS 282, 281, [astro-ph/9512102] (1996).
- [76] Peebles P.J., ApJ 284, 439 (1984).
- [77] Efstathiou G., Sutherland W.J. & Maddox S.J., Nature 348, 705 (1990).
- [78] Ostriker J.P. & Steinhardt P.J., Nature 377, 600 (1995).
- [79] Perlmutter S. *et al.*, The Supernova Cosmology Project, Bull. Am. Astron. Soc. 29, 1351, [astro-ph/9812473] (1997); ApJ 517, 565, [astro-ph/9812133] (1999).
- [80] Reiss A. *et al.*, Astron. J. 116, 1009, [astro-ph/9805201] (1998).
- [81] Smoot G.F. *et al.*, ApJ 396, L1 (1992).
- [82] Hu W. & White M., mba proc, 333H [astro-ph/9606140] (1997).
- [83] de Bernardis P. *et al.*, NewAR 43, 289D [astro-ph/9911461] (1999); Melchiorri A. *et al.*, ApJ 536L, 63M [astro-ph/9911445] (2000); Mauskopf P.D. *et al.*, ApJ 536L, 59M [astro-ph/9911444] (2000).
- [84] Planck Home Page:
<http://www.ipac.caltech.edu/Planck/planck.shtml>
- [85] Dekel A., Bertschinger E. & Faber S.M., ApJ 364, 349 (1990); Dekel A. *et al.*, ApJ 412, 1 (1993).
- [86] Padmanabhan T., “*Structure Formation in the Universe*”, Cambridge U.P. (1993).
- [87] Harrison E.R., PRD 1, 2726 (1970); Zel’dovich Ya. B., A&A 5, 84 (1970).
- [88] Steinhardt P.J., “*Particle and Nuclear Astrophysics and Cosmology in the Next Millennium*”, ed. by E.W. Kolb & R. Peccei, World Scientific, Singapore (1995).
- [89] Liddle A.R. & Lyth D.H., Phys. Rep. 231, 1, [astro-ph/9303019] (1993).

- [90] Hawking S.W., ApJ 145, 544 (1966); Olson D.W., PRD 14, 327 (1976).
- [91] Lyth D.H. & Mukherjee M., PRD 38, 485 (1988).
- [92] Lyth D.H. & Stewart E.D., ApJ 361, 343 (1990).
- [93] Dunsby P.K.S., Bruni M. & Ellis G.F.R., ApJ 395, 54 (1992).
- [94] Lima J.A.S., *Cosmologia I*, Notas de Aula do Curso de Cosmologia I, UFRN (2002);
Lima J.A.S., *Cosmologia II*, Notas de Aula do Curso de Cosmologia II, UFRN (2002).
- [95] Heath D.J., MNRAS 179, 351 (1977).
- [96] Eisenstein D.J., [astro-ph/9709054] (1997).
- [97] Bond J.R. & Efstathiou G., ApJ 285, L45 (1984).
- [98] Salinas S.R.A., “*Introdução à Física Estatística*”, 2 Edição, Edusp, São Paulo (1999).
- [99] Lesche B., J. Stat. Phys. 27, 419 (1982).
- [100] Curado E.M.F. & Tsallis C., J. Phys. A 24, L69 (1991) [Corrigenda: 24, 3187 (1991)
and 25, 1019 (1992)].
- [101] Tsallis C., Mendes R.S. & Plastino A.R., Physica A 261, 534 (1998).
- [102] Salinas S.R.A. & Tsallis C., Braz. J. Phys. 29, 1 (1999); Kaniadakis G., Lissia M.
& Rapisarda A., Physica A 305, 1/2, Elsevier, Amsterdam (2002).
- [103] <http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm>
- [104] Landsberg P.T. & Vedral V., Phys. Lett. A 247, 211 (1998).
- [105] Rajagopal A.K. & Abe S., PRL 83, 1711 (1999).
- [106] Tsallis C. & Brigatti E., [cond-mat/0305606] (2003).
- [107] Bak P., “*How Nature Works*”, Springer-Verlag, New York (1996).
- [108] Tsallis C., Bemski G. & Mendes R.S., Phys. Lett. A 257, 93 (1999).
- [109] Tsallis C., Anjos J.C. & Borges E.P., Phys. Lett. A 310, 372 (2003).

- [110] Borland L., PRL 89, 098701 (2002).
- [111] Bediaga I., Curado E.M.F. & Miranda J., Physica A 286, 156 (2000).
- [112] Walton D.B. & Rafelski J., PRL 84, 31 (2000).
- [113] Lima J.A.S., Silva R. & Plastino A.R., PRL 86, 2938 (2001).
- [114] Lyra M.L. & Tsallis C., PRL 80, 53 (1998); Oliveira H.P., Soares I.D. & Tonini E.V., Physica A 295, 348 (2001); Borges E.P., Tsallis C., Ananos G.F.J. & Oliveira P.M.C., PRL 89, 254103 (2002).
- [115] Weinstein Y., Lloyd S. & Tsallis C., PRL 89, 214101 (2002).
- [116] Tsallis C., Lamberti P.W. & Prato D., Physica A 295, 158 (2001); Alcaraz F.C. & Tsallis C., Phys. Lett. A 301, 105 (2002).
- [117] Plastino A.R. & Plastino A., Physica A 222, 347 (1995); Plastino A.R., Casas M. & Plastino A., Physica A 280, 289 (2000).
- [118] Cabral B.J.C. & Tsallis C., PRE 66, 065101(R) (2002); Anteneodo C. & Vallejos R.O., PRE 65, 016210 (2002).
- [119] Rosso O.A., Martin M.T. & Plastino A., Physica A 313, 587 (2002).
- [120] Montemurro M.A., Physica A 300, 567 (2001).
- [121] Tsallis C. & Borges E.P., [cond-mat/0301521] (2003).
- [122] Borges E.P., Eur. Phys. J. B 30, 593 (2002).
- [123] Malacarne L.C., Mendes R.S. & Lenzi E.K., PRE 65, 017106 (2002).
- [124] Abe S. & Suzuki N., PRE 67, 016106 (2003).
- [125] E. Fermi, "*Thermodynamics*", Dover, New York (1956).
- [126] Tisza L., "*Generalized Thermodynamics*", MIT Press, Cambridge, Massachusetts (1966).

- [127] Plastino A.R., “*Nonextensive Statistical Mechanics and Its Applications*”, eds. Abe S. & Okamoto Y., Springer, Berlin (2001).
- [128] Aly J.J. & Perez J., PRE 60, 5185 (1999); Taruya A. & Sakagami M., Physica A 307, 185 (2002).
- [129] Hamity V.H. & Barraco D.E., Physica A 282, 203 (2000); Hanyu C. & Habe A., ApJ 554, 1268 (2001); Tonini E.V., “*Caos e Universalidade em Modelos Cosmológicos com Pontos Críticos Centro-Sela*”, Tese de Doutorado, CBPF, Rio de Janeiro (2002).
- [130] Binney J. & Tremaine S., “*Galactic Dynamics*”, Princeton University Press, Princeton, (1987).
- [131] Bahcall N.A. & Oh S.P., Ap. J. Lett. 462, L49 (1996).
- [132] Schwartz D.A. *et al.*, ApJS 640, 592 (2006).
- [133] Cortes J.R., Kenney J.D.P. & Hardy E., RMxAC 26Q, 189C (2006).
- [134] Bezerra J.R., “*Teoria Cinética Não Extensiva: Coeficientes de Transporte e Outras Aplicações Físicas*”, Tese de Doutorado, UFRN, (2005).
- [135] Silva R., “*Teoria Cinética Não Extensiva: Efeitos Físicos em Gases e Plasmas*”, Tese de Doutorado, UFRN, (2000).
- [136] Bezerra J.R., Silva R. & Lima J.A.S., Physica A 322, 256 (2003); Potiguar F.Q. & Costa U.M.S., Physica A 303, 457 (2002).
- [137] Lima J.A.S., Bezerra J.R., Silva R., Physica A 289, 296 (2002).
- [138] Silva R., Plastino A.R. & Lima J.A.S., Phys. Lett. A 249, 401 (1998).
- [139] Bittencourt J.A., “*Fundamentals of Plasma Physics*”, 2nd Ed., co-Edition FAPESP, Brazil, (1995).
- [140] Lucchin F. & Matarrese S., ApJ 330, 535 (1988).
- [141] Giuricin G., Mardirossian F., Mezzetti M., Persic M. & Salucci P., [astro-ph/9308015] (1993).

- [142] White M., [astro-ph/0207185] (2002).
- [143] Peacock J.A. & Heavens A.F., MNRAS 243, 133 (1990).
- [144] Sheth R.K. & Tormen G., MNRAS 108, 119 (1999).
- [145] Jenkins A., Frenk C.S., White S.D.M., Colberg J.M., Cole S., Evrard A.E., Couchman H.M.P., Yoshida N., MNRAS 321, 372 (2001).
- [146] Zel'Dovich Ya.B., Afz 6, 319 (1970); Zel'Dovich Ya.B., Ap 6, 164 (1970); Zel'Dovich Ya.B., Kazhdan Ya.M., Ap 6, 50 (1970).
- [147] Arnold V.I., Shandarin S.F., Zel'Dovich Ia.B., GApFD 20, 111 (1982); Shandarin S.F., Doroshkevich A.G., Zel'Dovich Ia.B., SvPhU 139, 83 (1983).
- [148] Zel'Dovich Ya.B., A&A 5, 84 (1970).
- [149] Zel'Dovich Ia.B., Mamaev A.V., Shandarin S.F., SvPhU 139, 153 (1983); Shandarin S.F., Zel'Dovich Ia.B., ComAp 10, 33 (1983); Shandarin S.F., Zel'Dovich Ia.B., PhRvL 52, 1488 (1984).
- [150] Silva R., Lima J.A.S. & Santos J., PRE 61, 3260 (2000).
- [151] Longair M.S., "*Galaxy Formation*", Springer-Verlag, Berlin (1998).
- [152] Abramowitz M., Stegun I.A., "*Handbook of Mathematical Functions*", Dover, NY (1972).
- [153] Yano T., Nagashima M. & Gouda N., ApJ 466, 1 (1996).
- [154] Jedamzik K., ApJ 448, 1 (1995).
- [155] Teugels J. & Sundt B. (editors), "*Encyclopedia of Actuarial Science*", Vol. 3, (2004).
- [156] Nadarajah S., Kotz S., Phys. Let. A 359, 577 (2006).
- [157] Kaniadakis G., Physica A 296, 405 (2001); Kaniadakis G., PRE 66, 056125 (2002).
- [158] Bennett C.L. *et al.*, ApJS 148, 1 (2003).
- [159] Finoguenov A., Reiprich T.H. & Boehringer H., A&A 368, 749 (2001).

- [160] Borgani S., Rosati P., Tozzi P. & Norman C., ApJ 517, 40 (1999b).
- [161] Schuecker P., Boehringer H., Arzner K. & Reiprich T.H., A&A 370, 715 (2001).
- [162] Kitayama T. & Suto Y., ApJ 469, 480 (1996).
- [163] Balbi A. *et al.*, ApJ 545, L1 (2000).
- [164] Jaffe A.H. *et al.*, PRL 86, 3475 (2001).
- [165] Bardeen J.M., Bond J.R., Kaiser N. & Szalay A.S., ApJ 304, 15 (1986).
- [166] Sugiyama N., ApJS 100, 281 (1995).
- [167] Mather J.C. *et al.*, ApJ 420, 439 (1994).
- [168] Burles S. & Tytler D., ApJ 499, 699 (1998).
- [169] Mould J.R. *et al.*, ApJ 529, 786 (2000).
- [170] Governato F. *et al.*, MNRAS 307, 949 (1999).
- [171] Hannestad S., [astro-ph/0504017] (2005).
- [172] Maor I. & Lahav O., [astro-ph/0505308] (2005).
- [173] Percival W.J., [astro-ph/0508156] (2005).
- [174] Wang L. & Steidhardt P.J., ApJ 508, 483 (1998).
- [175] Silveira V. & Waga I., PRD 64, 4890 (1994).
- [176] Basilakos S., ApJ 590, 636 (2003).
- [177] Percival W.J., Miller L. & Peacock J.A., MNRAS 318, 273 (2000).
- [178] Gunn J.E., Gott J.R., ApJ 176, 1 (1972).
- [179] Ma C.P., Caldwell R.R., Bode P. & Wang L., ApJ 521, L1 (1999).
- [180] Lokas E.L., Bode P. & Hoffman Y., MNRAS 349, 595 (2004).
- [181] Cunha J.V., Alcaniz J.S. & Lima J.A.S., PRD 69, 083501 (2004).

- [182] Lima J.A.S., Cunha J.V. & Alcaniz J.S., PRD 68, 023510 (2003).
- [183] Fusco-Femiano R., DalFiume D. *et al.*, ApJ 513, L21 (1999).
- [184] Durret F. *et al.*, A&A 390, 397 (2002).
- [185] Fusco-Femiano R., Orlandini M. *et al.*, ApJ 602, L73 (2004).
- [186] Enßlin T.A., Lieu R. & Biermann P.L., A&A 344, 409 (1999).
- [187] Dogiel V.A., A&A, 359, 66 (2000).
- [188] Liang H., Dogiel V.A. & Birkinshaw M., MNRAS 337, 567 (2002).
- [189] Timokhin A.N. *et al.*, A&A 417, 391 (2004).
- [190] Dogiel V.A., A&A, 357, 66 (2000).
- [191] Rybicki G.B. & Lightman A.P., “*Radiative Processes in Astrophysics*”, ed. John Wiley & Sons, (1979).
- [192] Novikov I.D. & Thorne K.S., “*Black Holes*”, Les Houches, Eds. C. DeWitt & B. DeWitt, Gordon and Breach, New York, (1973).
- [193] Gradshteyn I.S. & Ryzhik I.M., “*Table of Integrals, Series and Products*”, Academic Press Inc., Orlando, Florida (1980).
- [194] Feix M. *et al.*, [cond-mat/0407245] (2004).
- [195] Sirghi L., Aoki T. & Hatanaka Y., Surf. & Coat. Tech. 187, 358 (2004).
- [196] Rohde D., Pecher P., Kersten H., Jacob W. & Hippler R., Surf. & Coat. Tech. 149, 206 (2002).
- [197] Lima J.A.S. & Trodden M., PRD 53, 4280 (1996); Cunha J.V., Lima J.A.S. & Pires N., A&A 390, 809 (2002); Cunha J.V. & Santos R.C., IJMPD 13, 1321 (2004); Alcaniz J.S. & Lima J.A.S., PRD 72, 063516 (2005).
- [198] Cooray A.R. & Huterer D., ApJ 513, L95 (1999).
- [199] Linder E.V., PRL 90, 091301 (2003).

- [200] Padmanabhan T. & Choudhury T.R., MNRAS 344, 823 (2003).
- [201] Maor I., Brustein R. & Steinhardt P.J., PRL 86, 6 (2001).
- [202] Weller J. & Albrecht A., PRD 65, 103512 (2002).
- [203] Pen U., New Astronomy 2, 309 (1997).
- [204] Sasaki S., Pub. Astron. Soc. Japan 48, L19 (2002).
- [205] Allen S.W., Schmidt R.W. & Fabian A.C., MNRAS 334, L11 (2002).
- [206] Cunha J.V. & Santos R.C., Int. J. Mod. Phys. D, 13, 1321 (2004).
- [207] Freedman W. *et al.*, ApJ 553, 47 (2001).
- [208] Kirkman D. *et al.*, ApJS 149, 1 (2003).
- [209] Jain D. & Dev A., [astro-ph/0509212] (2005).
- [210] Sunyaev R.A. & Zel'dovich Ya.b., Comments Astrophys. Space Phys. 4, 173 (1972).
- [211] Silk J. & White S.D.M., ApJ 226, L103 (1978).
- [212] Birkinshaw M., MNRAS 187, 847 (1979).
- [213] Reese E.D. *et al.*, ApJ 581, 53 (2002).
- [214] De Filippis E., Sereno M., Bautz M. W. & Longo G., ApJ 625, 108 (2005).
- [215] Fox D.C. & Pen U.L., ApJ 574, 38 (2002).
- [216] Sereno M., De Filippis E., Longo G., Bautz M.W., ApJ 645, 170 (2006).
- [217] Jones M.E. *et al.*, MNRAS 357, 518 (2005).
- [218] Freedman W.L., Phys. Rep. 333, 13 (2000).
- [219] Peacock J.A., “*Cosmological Physics*”, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1999).
- [220] Hu W., “ASP Conf. Ser. 339: *Observing Dark Energy*”, ed. Wolf S.C. & Lauer T.R., (2005).

- [221] Eisenstein D.J. *et al.*, ApJ 633, 560 (2005).
- [222] Lima J.A.S., Cunha J.V. & Alcaniz J.S., [astro-ph/0608469] (2006).
- [223] Alcaniz J.S., PRD 69, [astro-ph/083521] (2004).
- [224] Mason B.S. *et al.*, ApJ 555, L11 (2001).
- [225] Ebeling H. *et al.*, MNRAS 281, 799 (1996).
- [226] Reese E.D., “*Measuring and Modeling the Universe*”, ed. Freedman W.L., CUP, [astro-ph/0306073] (2004).
- [227] Cunha J.V., Lima J.A.S. & Pires N., A&A 390, 809 (2002).
- [228] Alcaniz J.S., Lima J.A.S. & Cunha J.V., MNRAS, 340, L39 (2003).
- [229] Sandage A., Tamman G.A., Saha A., Reindl B., Machetto F.D. & Panagia N., [astro-ph/0603647] (2006).
- [230] Peebles P.J.E. & Ratra B., Rev. Mod. Phys. 75, 559 (2003).
- [231] Lima J.A.S., Braz. J. Phys. 34, 194 (2004).
- [232] Wang P., [astro-ph/0507195] (2005).
- [233] Henry J.P., ApJ 609, 603 (2004).
- [234] Sheth R., Mo H. & Tormen G., MNRAS 323, 1 (2001).